DEBRECENI EGYETEM
TANÁRKÉPZÉSI KÖZPONT

A középiskolai matematikatanítás időszerű kérdései

BALLA ÉVA
HERENDINÉ KÓNYA ESZTER
PAULOVITS GYÖRGY

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2015

Szaktárnet-könyvek 10.

Sorozatszerkesztő:
Maticsák Sándor

Készült
a SZAKTÁRNET (TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0009)
pályázat keretében

Lektorálta:
Deli Lajos

Technikai szerkesztő:
Buzgó Anita

Borítóterv:
Nagy Tünde

ISBN 978 963 473 XXX X

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
www.dupress.hu
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Készült a Kapitális Nyomdában, 2015-ben.

Tartalom

Bevezetés

Kézikönyvünk *A középiskolai matematikatanítás időszerű kérdései* című továbbképzési programhoz készült. Az oktatási rendszer, ezen belül a matematika oktatása is folyamatosan változik. A Nemzeti Alaptanterv, a Kerettantervek és ehhez kapcsolódóan a tankönyvek is módosulnak, új, digitális oktatási segédeszközök jelennek meg. Mindez új kihívások elé állítja a gyakorló pedagógusokat. Ugyan a tananyag egésze a hosszú évek alatt kialakult szakmai konszenzusnak megfelelően viszonylag állandó, ám a hangsúlyok több esetben is eltolódnak, és így folyamatos újragondolást kívánnak a matematikatanároktól.

A program elsősorban középiskolai matematikatanároknak szól, ideértve a kezdő vagy újrakezdő, továbbá az évek óta pályán lévő kollégákat.

A tananyag összeállításánál olyan témák kiválasztását tartottuk szem előtt, amelyek alaposabb tárgyalása hozzájárulhat a középiskolai matematika eredményesebb, színvonalasabb tanításához. Egyszerre kívánjuk megőrizni és továbbfejleszteni a világviszonylatban is elismert magyar matematikatanítás hagyományait, ugyanakkor innovatív módon alkalmazni a XXI. század digitális oktatástechnológiai eredményeit. A feldolgozott témakörök között ennek megfelelően megtalálhatók *„Elfelejtett” feladatmegoldási algoritmusok* és a dinamikus szerkesztőprogramok felhasználását bemutató feladatok is. Tekintettel arra, hogy az iskolai matematika tanítása komplex, spirális felépítésű rendszer, szükségesnek tartjuk az egyes témakörök közötti kapcsolatok tudatosítását, a tantárgyon belüli belső koncentráció bemutatását. Ez a törekvésünk a program egészében nyomon követhető, az *Analógiák az aritmetika, halmazok, logika, események témakörében* és a *Függvénytani eszközök alkalmazása különböző témakörök tanításában* című fejezeteknek pedig központi gondolata.

Az iskolai matematikatanításnak sokrétű szerepet kell betöltenie. A matematika természetesen tudomány, alkotótevékenység, más tudományok és iskolai tantárgyak segítője, a mindennapi élet eszköze, kulturális örökség, de mindenekelőtt gondolkodásmód (Szendrei 2005: 20–30). Bertrand Russel szavaival élve: *„A matematika egyik legfőbb célja – ha helyesen tanítják – az, hogy felkelti a tanulók hitét az észben, bizalmat* *ébreszt benne a bizonyított dolgok igazsága és a bizonyítás értéke iránt.*"[1] Igaz, hogy a középszintű érettségin nem követelmény a bizonyítás, azonban az intuíció, az érvelés, a logikus gondolkodás fejlesztését ezen a szinten is elengedhetetlennek tartjuk. Ennek mikéntjéről is szól *A bizonyítás tanításának kérdései* című fejezet. A matematikatörténeti vonatkozások beemelése a tantervbe nem újdonság, ennek módjáról viszont kevés módszertani anyag áll a gyakorló pedagógusok rendelkezésére. Erre adunk példákat a *Matematikatörténeti vonatkozások beépítése a tananyagba* című fejezetben, természetesen a teljesség igénye nélkül.

A kétszintű érettségi rendszer 2005-ös bevezetésével olyan új, megoldandó tanítási feladatok jelentek meg a matematikaórákon, amikkel korábban nem kellett foglalkozni. Gondolunk itt például arra, hogy a középiskola 9-10. évfolyamán ugyan még nem válik el képzés szintje, de az ekkor tárgyalt témakörökben a tanárnak mégis tisztán kell látnia, hogy melyek azok a tanítási momentumok, amelyek hozzájárulnak az emelt szintű tematika alaposabb megértéséhez. Ezt a tudatosítást segíti az *Emelt szintű ismeretek előkészítése a középszintű tananyag keretein belül* című fejezet.

A továbbképzési programmal lehetőséget kívánunk teremteni a meglévő szakmai ismeretek rendszerezésére, a szakmódszertani eszköztár felfrissítésére és gazdagítására, valamint a tanításban szerzett tapasztalatok megosztására. A kézikönyv minden fejezete bőségesen tartalmaz kidolgozott példákat és önálló munkára szánt feladatokat, továbbá ajánlott szakirodalmat. A munkát ennek ellenére nem tekintjük lezártnak, a továbbképzési program résztvevői továbbfejleszthetik, kiegészíthetik saját oktatási tapasztalataik alapján. Örömmel veszünk minden építő jellegű kritikát, visszajelzést, kiegészítést.

---

[1] Russel, B. (1976): *Miszticizmus és logika*, Budapest: Magyar Helikon, p. 99.

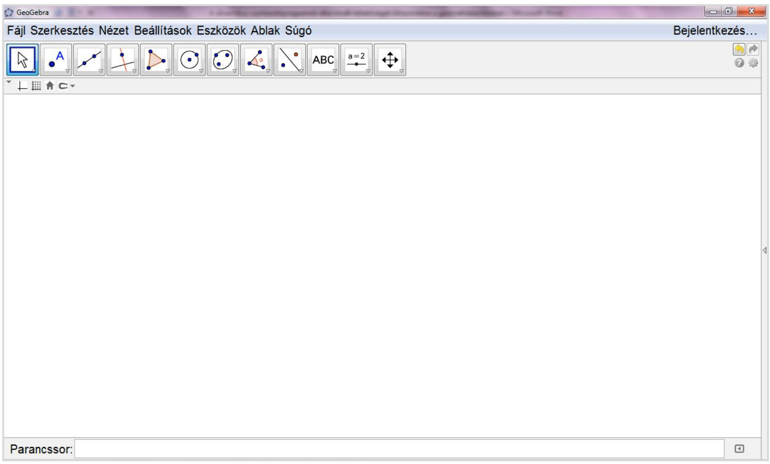
1. A dinamikus szerkesztőprogramok által kínált lehetőségek kihasználása a geometriatanításban

HERENDINÉ KÓNYA Eszter

1.1. A GeoGebra program rajzolófelületének bemutatása, egyszerű geometriai szerkesztések megvalósítása, fogalmak, tételek szemléltetése

1.1.1. A rajzolófelület bemutatása

Az elemi geometria tanításához a GeoGebra program rajzolófelületét használjuk. Első lépésként a *Nézet* menüből a *Rajzlap* nézetet választjuk ki és nem kérjük sem a koordináta-tengelyek, sem a rács mutatását. Az így kapott sima rajzlapon dolgozunk (*1. ábra*).



1. ábra

A szerkesztőprogram működésének alapját az euklideszi szerkesztés alaplépései jelentik.

Euklideszi szerkesztésen az alábbi hat lépés véges sokszori alkalmazását értjük:

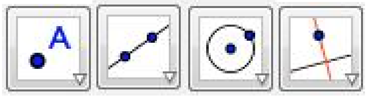
1. Két adott pontra illeszkedő egyenes megrajzolása (egyélű vonalzóval).
2. Két adott pont távolságának körzőnyílásba vétele.

3. Adott pontból adott sugárral kör rajzolása.
4. Két metsző egyenes metszéspontjának kijelölése.
5. Kör és a kört metsző egyenes metszéspontjainak kijelölése.
6. Két egymást metsző kör metszéspontjainak kijelölése.

Megjegyzés
Az utolsó három lépést a hagyományos szerkesztés során gyakran nem tudatosítjuk, hiszen a megrajzolt vonalak mutatják a metszéspontokat is. A szerkesztőprogram azonban csak akkor tekinti a metszeteket önálló pontnak, ha elvégezzük a metszéspontok kijelölését.

1.1.2. Pontra, egyenesre, körre vonatkozó funkciók

Az *1. ábrán* látható eszközök közül a pontra, egyenesre, körre és a kölcsönös helyzetekre vonatkozó funkciókkal foglalkozunk először:

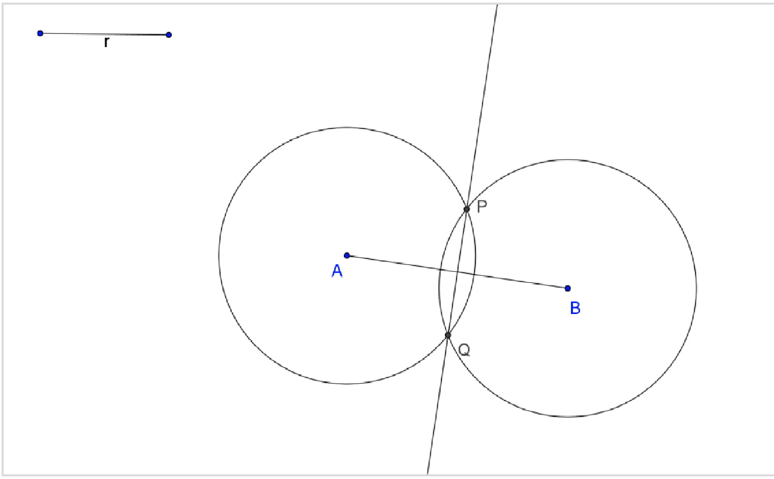


A program tanulmányozását célszerű egyszerű alapszerkesztések megvalósításával kezdeni.

Példa
Szerkesszük meg adott szakasz felezőmerőlegesét!

Megoldás
Kijelöljük az AB szakaszt, majd a *Körző* eszköz használatával kört rajzolunk mind az A, mind a B végpontból (előtte megadunk egy r hosszúságú szakaszt, ez lesz a kör sugara).

Kijelöljük a két kör P és Q metszéspontjait. A P és Q pontokra egyenest illesztünk. Ez az egyenes az AB szakasz felezőmerőlegese (*2. ábra*).



2. ábra

Megjegyzések

– Előfordulhat, hogy a két *r* sugarú kör nem metszi egymást. Ekkor a körzőnket nagyobb távolságra kell nyitnunk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a *Kijelölés* eszközgombra kattintva a felvett *r* szakasz egyik végpontját távolítjuk mindaddig, míg a két körnek már lesz két közös pontja.

– A szakaszfelező szerkesztését egy lépésben is elvégezhetjük a beépített alapszerkesztéseknek köszönhetően. Ezt a funkciót csak akkor használjuk, ha a szakaszfelező szerkesztésének elméleti hátterével már tisztában vannak a tanulók.

További feladatok

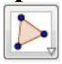
– Szerkesszünk adott egyenesre rá nem illeszkedő pontból merőleges egyenest!

– Szerkesszük meg adott körnek adott pontbeli érintőjét!

– Szerkesszünk adott egyenessel rá nem illeszkedő adott ponton átmenő párhuzamos egyenest!

Mindegyik esetben soroljuk fel az euklideszi szerkesztés alaplépéseit is!

1.1.3. Háromszögekkel kapcsolatos alapszerkesztések

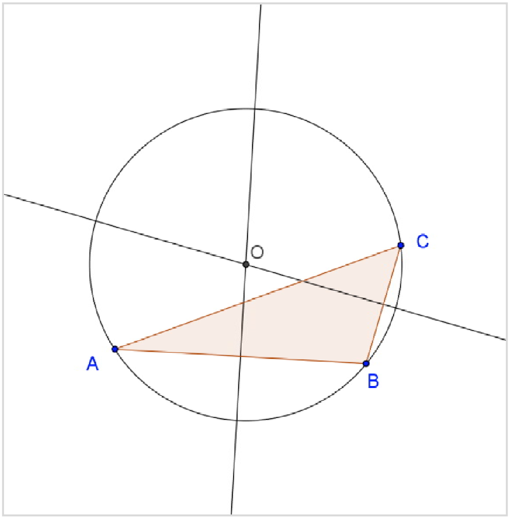
A sokszögekre vonatkozó  eszközcsoporttal lehetővé válik, hogy a háromszöget, vagy más sokszöget egyetlen objektumként kezeljük.

Példa

Legyen adott az *ABC* háromszög. Szerkesszük meg a köré írt körét!

Megoldás

A háromszög megadása után egy-egy lépésben megszerkesztjük két oldalának felezőmerőlegesét. Kijelöljük a két egyenes *O* metszéspontját, majd kört rajzolunk ezzel a középponttal. A kör megrajzolásához mind a három körrajzoló funkció használható (*3. ábra*).



3. ábra

Megjegyzések

– Ha a harmadik oldal felezőmerőlegesét is megrajzoljuk, akkor látjuk (igaz, nem bizonyítottuk), hogy a három egyenes egy pontban metszi egymást.
– Az A, B és C pontokat mi vettük fel, így ezek szabadon mozgathatók, míg az O pontot egy szerkesztési eljárás eredményeképpen kaptuk, ezért az a másik három pont helyzetétől függ. A háromszög egyik csúcsának mozgatásával változtathatjuk, hogy a háromszög

hegyes-, tompa- vagy derékszögű legyen, így megfigyelhetjük, hogyan helyezkedik el a köréírt kör középpontja az egyes esetekben.
– Ebben az esetben is van lehetőségünk arra, hogy a háromszög köré írt kört egy lépésben, a háromszög három csúcsára kattintva megrajzoljuk.

További feladatok

– Szerkesszük meg egy adott háromszög beírható körét!
– Szerkesszük meg egy adott háromszög magasságpontját! Ellenőrizzük, hogy a két magasságvonal metszéspontján valóban átmegy a harmadik magasságvonal is!
– Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két oldala és az egyik magassága!

1.1.4. Szögek és távolságok

A GeoGebrában lehetőség van arra, hogy a szögekre, távolságokra vonatkozó  eszközökkel szakaszok hosszát, szögek nagyságát, sokszögek területét kiírassuk az ábrára.

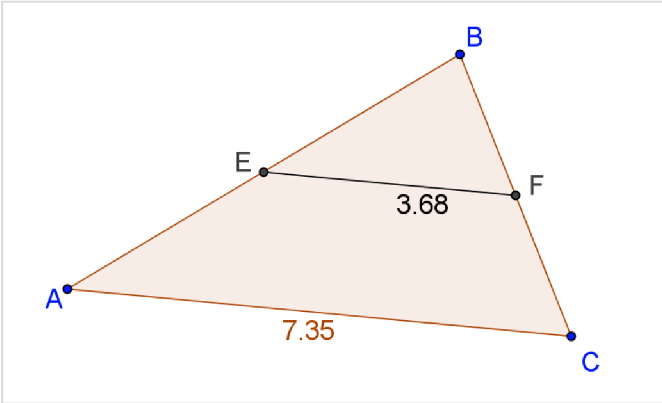
Példa

Szerkesszük meg egy adott háromszög egyik oldalhoz tartozó középvonalát, majd írassuk ki ennek az oldalnak és a középvonalnak a hosszát is. Mit tapasztalunk, ha a) az oldallal szemközti, b) az oldalon levő csúcsot mozgatjuk?

Megoldás

A három csúcsot megadva egy lépésben megrajzoljuk a háromszöget. Két oldalának felezőpontja ugyancsak egy lépésben kijelölhető. Összekötjük a két felezőpontot egy szakasszal, majd kiíratjuk a középvonal és a hozzátartozó oldal hosszának mérőszámát (*4. ábra*).

a) Mozgatva az oldallal szemközti csúcsot, azt látjuk, hogy a középvonal hossza nem változik.
b) Mozgatva az oldal egyik végpontját, megsejthető az oldal és a középvonal hossza közötti kapcsolat.



4. ábra

Megjegyzés

A kerekítési hibának köszönhetően az oldal és a hozzátartozó középvonal hossza közötti összefüggés nem olvasható le minden esetben egyértelműen az ábráról.

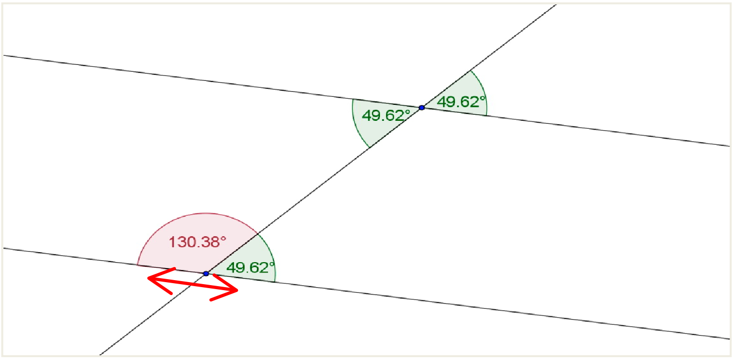
Példa

A nevezetes szögpárok közül szemléltessük a) a váltó- és az egyállású szögeket, b) a mellékszögeket! Mutassuk meg a szögpárok közötti kapcsolatot!

Megoldás

Adjunk meg egy párhuzamos egyenespárt, amelyet elmetszünk egy másik egyenessel. A keletkezett szögek nagyságát kiíratva látható, hogy a szögpárok között vannak egyenlők és vannak olyanok, amelyek 180°-ra egészítik ki egymást (*5. ábra*).

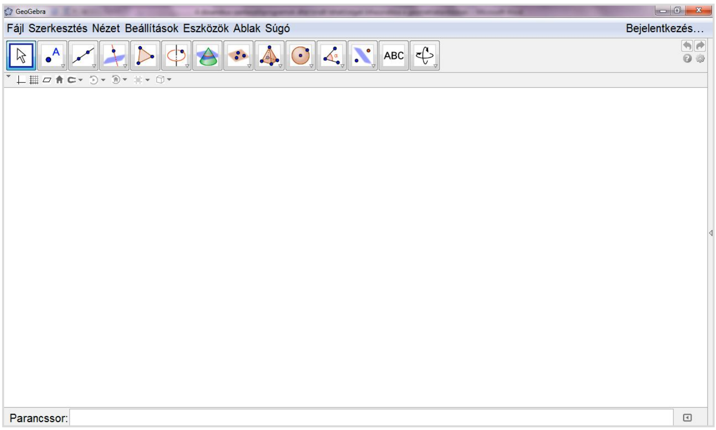
A nyíl mentén mozgatva a pontot, tapasztalhatjuk, hogy a szögpárok között megfigyelt összefüggések a metsző egyenes helyzetének megváltoztatása után is fennállnak.



5. ábra

1.1.5. A Geogebra 3D-s felületének bemutatása

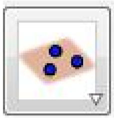
A térgeometriai fogalmak szemléltetését elsősorban különböző, kézbe fogható modellekkel végezzük. A GeoGebra 3D-s felülete (*6. ábra*) alkalmas a térbeli rajzok elkészítésére, és az elkészült ábrák mozgatására.



6. ábra

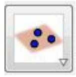
A *Rajzlap* nézetben használt eszközgombok értelemszerűen módosulnak, lehetővé téve a térbeli viszonyok ábrázolását.

A síkot három nem egy egyenesre illeszkedő pontja, két egyenese, vagy egy pontja és egy rá nem illeszkedő egyenese határozza meg. Ezt egy újabb eszközcsoportra kattintva rajzolhatjuk meg:



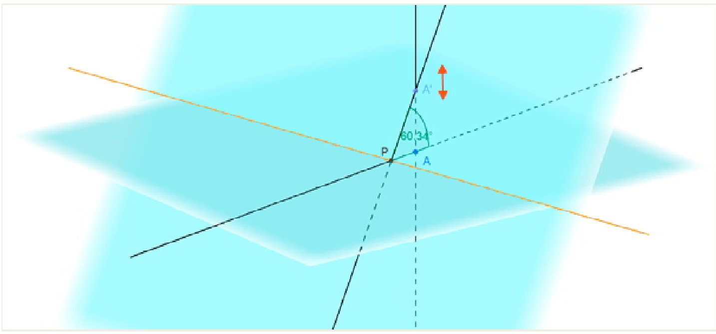
Példa
Ábrázoljuk két metsző sík szögét!

Megoldás

Adjuk meg az egyik síkot három pontjával: 

A sík egyik pontjába (*A*) állítsunk merőlegest a síkra, majd ezen az egyenesen vegyünk fel egy tetszőleges *A’* pontot. Az *A’* ponton és a sík másik két pontján át újabb síkot fektetve két metsző sík keletkezik.

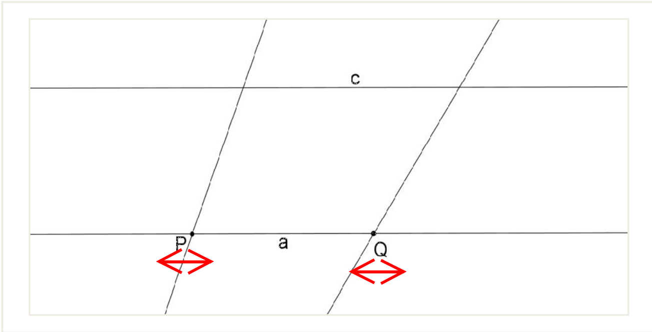
Jelöljük ki a két sík metszésvonalát a  funkciógomb segítségével. Az *A’* pontból merőlegest állítunk erre a metszésvonalra, kapjuk a *P* pontot. Az *A’PA* szög meghatározza a két sík szögét. Mozgatva az *A’* pontot, látjuk, hogyan változik a sík helyzete és így a két sík szöge (*7. ábra*).



7. ábra

1.1.6. Példák a geometriai fogalmak szemléltetésére
A rajzolás során mélyebben megérthető, például a *trapéz* fogalma.

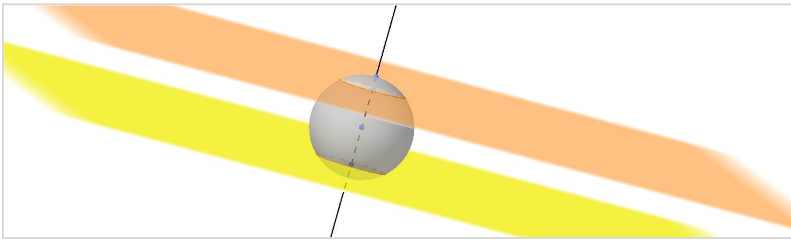
Jelöljünk ki egy párhuzamos egyenespárt, majd két, ezeket metsző egyenest (*8. ábra*). Az így keletkező négyszög trapéz lesz, hiszen van egy párhuzamos oldalpárja. A *P* és *Q* pontok mozgatásával változtathatjuk az oldalegyenesek helyzetét, megmutatva, hogy a paralelogramma speciális trapéz csakúgy, mint a rombusz, vagy a téglalap és a négyzet.



8. ábra

A <u>*gömb síkmetszeteit*</u> a következőképpen szemléltethetjük:

Adjunk meg egy gömböt középpontjával és sugarával, majd rajzoljuk meg egy átmérőjének egyenesét. Ezen az egyenesen egy tetszőleges pontot kijelölve (melynek távolsága a gömb középpontjától kisebb a sugárnál), a pontban állítsunk az egyenesre merőleges síkot. Jelöljük ki a sík és a gömb metszésvonalát. A pont mozgatásával megmutatható, hogy a sík a gömbből különböző sugarú köröket metsz ki, s hogy a legnagyobb sugarú körmetszetet akkor kapjuk, ha a mozgó pont egybeesik a gömb középpontjával. Ily módon a <u>*gömbsüveg*</u> fogalmát is szemléltetni tudjuk, míg két párhuzamos síkot rajzolva a <u>*gömböv*</u> is láthatóvá válik (*9. ábra*).

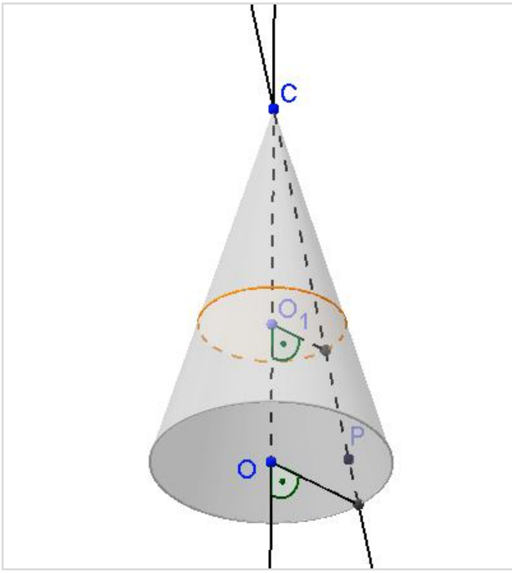


9. ábra

Vizsgáljuk meg egy <u>*egyenes körkúp és a tengelyére merőleges sík metszetét*</u>!

Adjuk meg a kúpot a  eszköz segítségével, majd kössük össze az alapkör középpontját a kúp csúcsával. Jelöljük ki ezen a szakaszon az O_1 pontot, és fektessünk rajta keresztül az egyenesre merőleges síkot. A sík és a kúpfelület metszésvonalát bejelölve, az O_1 pont mozgatásával látható, hogy az eredeti kúpot a sík egy csonkakúpra és egy kisebb kúpra osztja.

Ha kijelöljük a kúp felületén a *P* pontot, és ezen keresztül a *C* csúcsból egyenest húzunk, a kúp egy alkotójának egyeneséhez jutunk. A *PC* egyenes és a két kör metszéspontjait kijelölve kapjuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek befogói az alapkörök sugarai és a kúpok magasságai, átfogói pedig az alkotók (*10. ábra*). Az O_1 pontot a kúp tengelyén, a *P* pontot a kúp felületén mozgatva látható, hogy a fenti derékszögű háromszögek minden esetben léteznek.

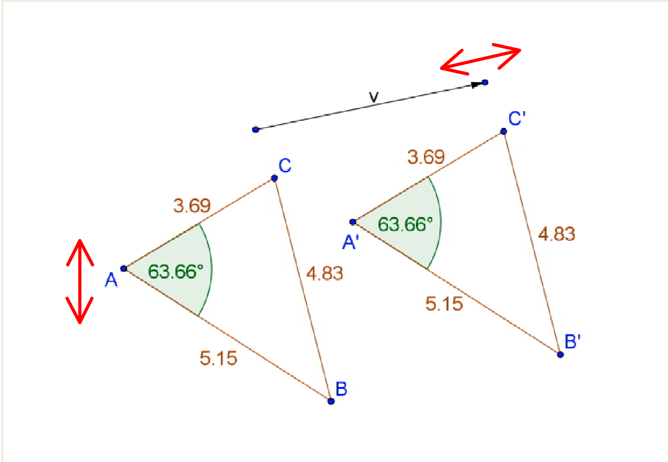


10. ábra

Figyeljük meg az eltolás tulajdonságait!

Adjunk meg egy ***v*** vektort és egy *ABC* háromszöget!

Az  *eltolás* eszköz felhasználásával rajzoljuk meg a háromszög *A'B'C'* képét. Írassuk ki a háromszög szögeinek és oldalainak nagyságát. A vektort mozgatva figyeljük meg, hogy hogyan változik a képháromszög oldalainak és szögeinek nagysága. Módosíthatjuk az eredeti háromszöget is (*11. ábra*). Mindkét esetben azt tapasztaljuk, hogy a háromszög szögeinek és oldalainak nagyságát az eltolás nem változtatja meg.

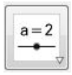


11. ábra

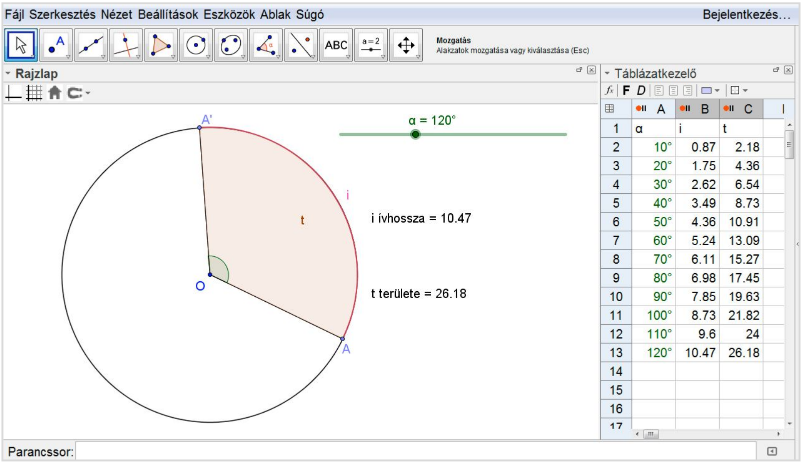
Megjegyzés

A megfigyelés szempontjából nincs szerepe annak, hogy az oldalak hosszát milyen mértékegységben adjuk meg, csak az a fontos, hogy ugyanazt a mértékegységet használjuk.

Fedeztessük fel *az egyenes arányosságot a kör középponti szöge és a körív hossza, valamint a körcikk területe között*!

Az arányosság felfedeztetéséhez a szöget változó mennyiségként definiáljuk az ún. *csúszka* eszköz  segítségével.

A körív és a körcikk megrajzolása után a *Rajzlap* nézet mellett bekapcsoljuk a *Táblázatkezelő* nézetet is, majd az α szöget, az i ívhosszt és a körcikk t területét a táblázatba mentjük. Az α szög nagyságát a csúszkával *10°*-onként változtatjuk, és a táblázatba kiíratjuk az egyes középponti szögekhez tartozó i és t értékeket (*12. ábra*).



12. ábra

Az értékek összehasonlításából következtethetünk a szögek nagyságának és az ívek hosszának illetve a szögek nagyságának és a körcikkek területének a kapcsolatára.

Megjegyzések

– Lehetőség van arra is, hogy a csúszka mozgását animáljuk.
– A *Táblázatkezelő* nézetben megjelenített összetartozó mennyiségek ábrázolásával az egyenes arányosság rögtön adódik.

További feladatok

– Szemléltessük a húrnégyszögekre vonatkozó tételt!
– Mutassuk meg, hogy két párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy eltolással!
– Készítsük el egy kocka síkmetszetét, ha tudjuk, hogy a sík illeszkedik a kocka három különböző a) élének, b) lapjának egy-egy pontjára!
– Rajzoljunk meg olyan síkot, amely az egyenes körhengerből téglalapot metsz ki!
– Rajzoljunk csonkakúpot, ha adott a tengelye és egyik alkotója!

Felhasznált és ajánlott irodalom

Füleki, L. & Szloboda, T. (szerk.) (2005): *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
GeoGebra. http://www.geogebra.org (2015. 02. 10.)

1.2. Feladatok megoldása a GeoGebra program rajzolófelületén

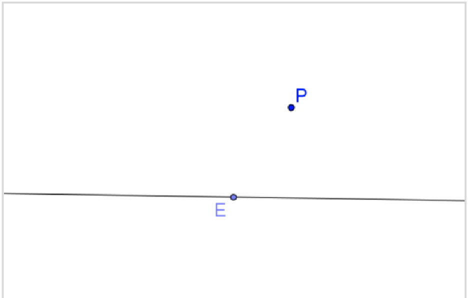
1.2.1. Szerkesztési feladatok

Példa

Szerkesszünk kört, amely egy egyenest egy adott pontban érint, és átmegy egy kitűzött, az egyenesre nem illeszkedő ponton.

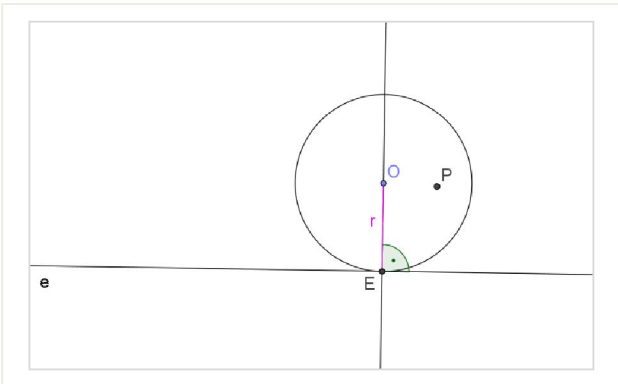
Megoldás

Adjuk meg az *e* egyenest, rajta az *E* érintési pontot és egy tetszőleges *P* pontot (*13. ábra*).

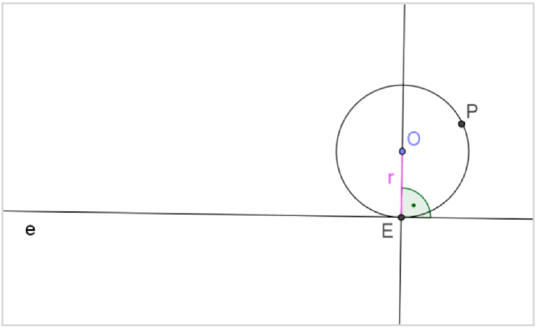


13. ábra

Tudjuk, hogy a kör érintője és az érintési pontba húzott sugár merőleges, ezért az *e* egyenesre az *E* pontban állított merőlegesen rajta kell lennie a kör középpontjának. Ezen a merőlegesen az *O* pontot tetszőlegesen kijelölve rajzolunk egy *E*-t érintő kört *(14. ábra*). Az *O* pontnak (és így a kör sugarának) a mozgatásával megkeressük azt a helyzetet, amikor ez a kör átmegy a *P* ponton (*15. ábra*).



14. ábra



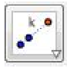
15. ábra

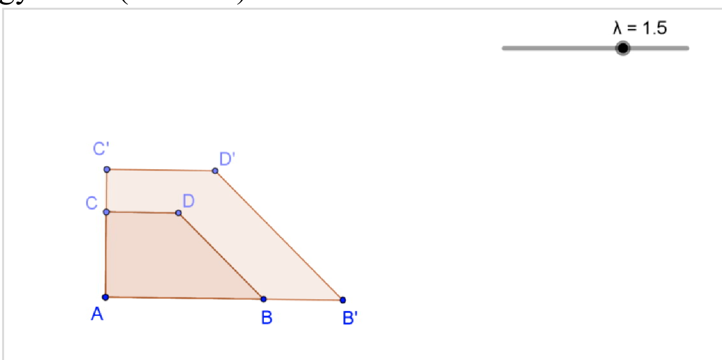
Az így kapott ábrán már látszik, hogy ebben az esetben az *OEP* háromszög egyenlő szárú, tehát az *EP* szakasz felezőmerőlegese metszi ki az *O* középpontot az *e*-re merőleges egyenesből.

Példa

Adjunk meg egy derékszögű trapézt. Nagyítsuk az egyik derékszögű csúcsából *1,5*-szeresére, *3*-szorosára, $\frac{1}{2}$ -szeresére, *-2*-szeresére.

Megoldás

A középpontos nagyítást (kicsinyítést) egy beépített eszközzel,  a *centrális nyújtással* végezhetjük. Ehhez megadjuk az alakzatot, a hasonlóság középpontját és az arányát. Az arányszámot a *csúszka* eszköz alkalmazásával könnyen változtathatjuk, így az alakzat és képének viszonya jól megfigyelhető (*16. ábra*).



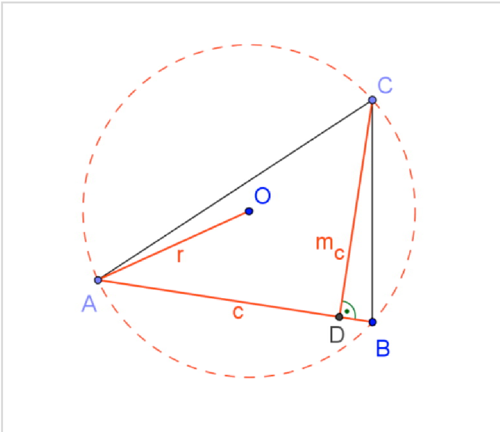
16. ábra

Példa

Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó magassága!

Megoldás

A szerkesztés első lépése egy jól látható vázlat elkészítése, amely segít megérteni a feladatot, bemutatja a szerkesztendő alakzatot, kiemelve benne a meglévő adatokat. (17. *ábra*) Ezt a rajzot célszerű kézzel elkészíteni.



17. ábra

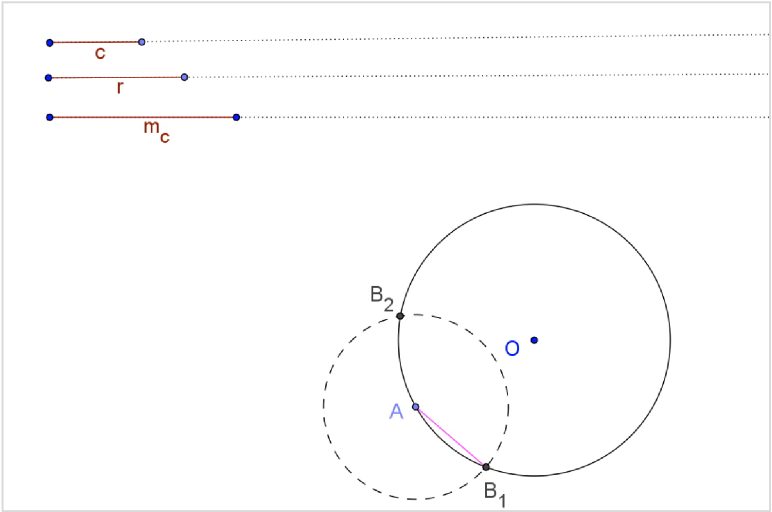
A vázlat tanulmányozásával alakítjuk ki a szerkesztési lépéseket, azaz adunk meg egy olyan algoritmust, melynek végeredménye a kívánt alakzat megszerkesztése.

Amikor konkrét adatokból indulunk ki, a szerkesztés menetét kitalálva és azt végrehajtva egyértelműen kiderül, hogy a kért alakzat megszerkeszthető-e vagy sem. A konkrét adatokról tetszőleges adatokra való áttérés nem egyszerű feladat a 9. évfolyamos tanulók számára. Hasonló absztrakciós fejlettséget feltételez, mint amikor az algebrát tanítjuk, és a számokkal végzett műveletek helyett az algebrai kifejezésekkel (betűkkel) kezdünk el dolgozni.

A szerkesztés egy lehetséges menete általános adatokkal:

Megadjuk a c, r, m_c szakaszokat. A szerkeszthetőség vizsgálatának megkönnyítése érdekében célszerű ezeket a szakaszokat egy-egy félegyenesen kijelölni, majd a szakaszmásoláshoz a program *Körző* funkcióját használni.

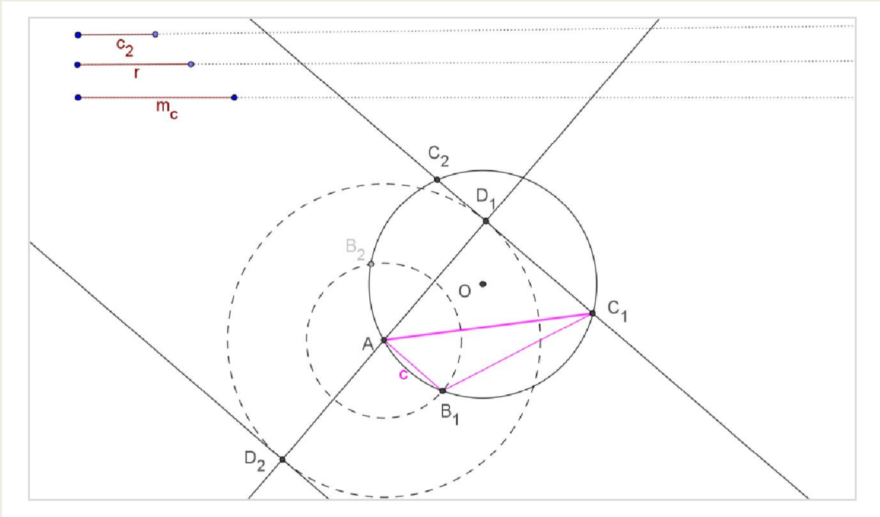
Adjuk meg az r sugarú kört tetszőlegesen választott O középponttal. Jelöljünk ki egy A pontot a körvonalon. Rajzoljuk meg az A középpontú c sugarú kört. Jelöljük ki a két kör metszéspontjait: B_1, B_2 (*18. ábra*).



18. ábra

Miután két metszéspontot kaptunk, a szerkesztést kétféleképpen folytathatnánk. Az áttekinthetőség érdekében csak az egyik végponttal dolgozzunk tovább. Jelöljük ki az AB_1 szakaszt, legyen ez a c oldal.

A következő lépés a háromszög c oldalhoz tartozó magasságának felhasználása. Mivel sem a C csúcsot, sem a magasság talppontját nem ismerjük, húzzunk párhuzamost a c szakasszal attól m_c távolságra: Állítsunk merőlegest a c oldal A végpontjában. Vegyük körzőnyílásba az m_c szakaszt, és rajzoljunk kört A középponttal. Jelöljük ki a kör és az előbb húzott merőleges egyenes metszéspontjait: D_1, D_2. A metszéspontokon keresztül húzzuk meg a két, c-vel párhuzamos egyenest. Jelöljük ki a párhuzamos egyenesek és az eredeti kör metszéspontjait. Ezek a metszéspontok adják a szerkesztendő háromszög C csúcsát (*19. ábra*).



19. ábra

A program a szerkesztést az euklideszi szerkesztés alaplépéseit felhasználva végzi. Ellentétben a kézi szerkesztéssel, nem körívekkel, hanem teljes körökkel dolgozik. Így jobban látható, hogy a köröknek, egyeneseknek rendszerint egynél több metszéspontja keletkezik. Az egyenértékű metszéspontok közül először célszerű egyet kiválasztani, és azzal folytatni tovább a szerkesztést, később azonban a diszkusszió során érdemes visszatérni a többi lehetőségre is.

A feladat diszkussziója: Meg kell vizsgálnunk, hogy a körnek és a párhuzamos egyenespárnak hány közös pontja lehet, s azt is, hogy a metszéspontok száma hogyan függ a felvett adatoktól. A lehetséges esetek megkeresését és az összefüggések felismerését segíti, ha mozgatjuk a felvett szakaszok végpontjait.

A kör O középpontja a háromszög egyenlőtlenségre vonatkozó tétel miatt akkor szerkeszthető, ha a sugár kétszerese nem kisebb a megadott c oldalnál. A C csúcs a kör és egy párhuzamos egyenespár metszeteként áll elő. Ez 0, 1, 2, 3, 4 megoldást jelent, attól függően, hogy milyen a viszonya az m_c magasságnak és az ABO háromszög alaphoz tartozó d magasságának ($d=0$, ha O az AB szakasz felezőpontja):

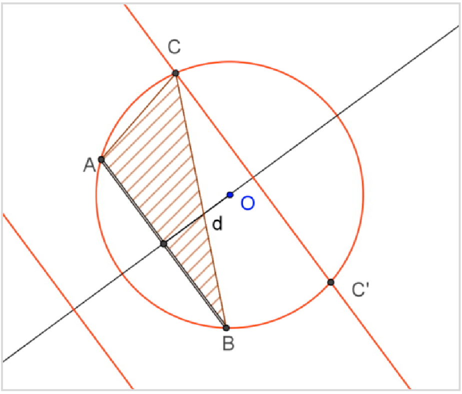
Ha $m_c>r+d$, akkor nincs megoldás.

Ha $m_c=r+d$, akkor egy megoldást, egy egyenlőszárú háromszöget kapunk.

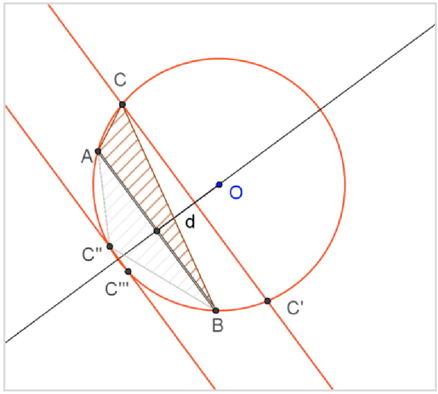
Ha r-d<m_c<r+d, akkor két megoldást kapunk, ezek egybevágó háromszögek. (20. *ábra*)

Ha r-d=m_c, akkor három megoldás van, közülük kettő egybevágó, egy pedig egyenlőszárú háromszög.

Ha r-d>m_c, akkor a megoldások száma 4, közülük 2-2 egybevágó. (21. *ábra*).



20. ábra



21. ábra

Megjegyzések

– A szerkesztési feladatok diszkutálása nem lehet túl összetett, olyan feladatokat válasszunk, ahol legfeljebb két kérdéses lépés adódik, különben a diszkusszió áttekinthetetlenül bonyolult lesz.
– A szerkesztés menetének leírása a tanár számára nem szükséges, hiszen a lépések visszajátszhatók.
– A diszkussziós lépések megtalálása dinamikus rajzolóprogrammal egyszerűbb, mint hagyományosan, hiszen a kiindulási adatok egérrel változtathatók, így hamar kiderülhet, hogy mikor van és mikor nincs megoldás (a több megoldás esete nehezebben ismerhető fel). Természetesen az okok megtalálása már gondolkodást igényel.

További feladatok

– Szerkesszünk adott egyenesen pontot, mely egy *O* ponttól 3 *cm*-re van. Mitől függ a megoldások száma?
– Szerkesszünk háromszöget, ha adott a köré írt kör sugara, egyik oldala és az oldalon lévő egyik szöge.
– Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott két szomszédos oldala és az egyik magassága.

- Tükrözzünk egy egyenlő oldalú háromszöget a középpontjára. Milyen síkidom az eredeti és a tükrözött háromszög közös része?
- Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon lévő csúcs, továbbá a másik két csúcson átmenő egy-egy egyenes.

1.2.2. Bizonyítási feladatok

Nyílt végű feladat megoldásához gyakran a *Nyomkövetés* funkciót célszerű használni.

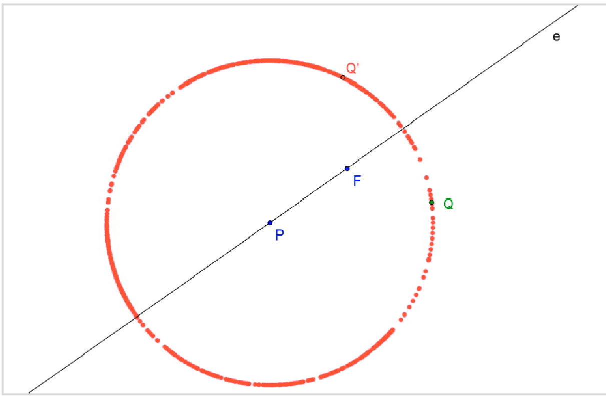
Példa

Adott a P és Q pont. A P ponton átmenő minden egyenesre tükrözzük a Q pontot. Milyen ponthalmazt alkotnak a tükörképek?

Megoldás

Adjunk meg egy P és F pontra illeszkedő e egyenest, valamint egy Q pontot. Tükrözzük a Q pontot az e egyenesre, jelöljük a tükörképet Q'-vel. A Q' pontra vonatkozóan kapcsoljuk be a *Nyomkövetés* funkciót, majd az e egyenes helyzetét változtassuk az F pont mozgatásával.

Látható, hogy a Q' pontok egy körön helyezkednek el (*22. ábra*).



22. ábra

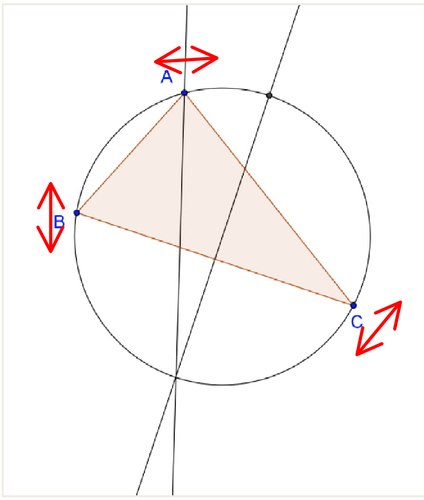
Ezzel *megsejtettük* a ponthalmazt, ezután *bebizonyítjuk*, hogy a Q' pontok valóban a P középpontú körön helyezkednek el: A tengelyes tükrözés távolságtartó, így a PQ szakasz egyenlő hosszúságú a PQ' szakasszal, hiszen $P=P'$. Ez az összefüggés a P-n átmenő tengely helyzetétől függetlenül fennáll, tehát a Q' pontoknak a P-től való távolsága megegyezik PQ-val, azaz állandó. Az adott ponttól állandó távolságra lévő pontok halmaza pedig kör.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik belső szögének szögfelező egyenese és a szemközti oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írt körön metszi egymást!

Megoldás

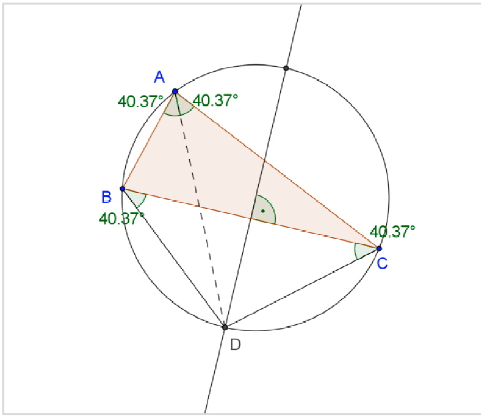
Első lépésként rajzoljuk meg az állításnak megfelelő ábrát, és ellenőrizzük, hogy az oldalfelező merőleges és a szögfelező metszéspontja valóban a háromszög köré írt körére esik. A háromszög csúcsait mozgatva kísérleti úton meggyőződünk arról, hogy az állítás igaz (*23. ábra*). Ez nem jelenti az állítás bizonyítását, de megerősíti annak helyességét.



23. ábra

A bizonyítás egyik lehetséges módja a következő:

Megrajzoljuk a BC oldal felezőmerőlegesét, és annak a körrel vett metszéspontját jelöljük D-vel. Tudjuk, hogy a felezőmerőleges minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, így a BDC háromszög egyenlő szárú, s ezért a B és a C csúcsnál lévő szögek egyenlők. Gondolatmenetünk helyességét megerősíti, ha kiíratjuk a szögek nagyságát, és a háromszöget változtatva tapasztaljuk, hogy a két szög valóban minden helyzetben ugyanakkora (*24. ábra*).



24. ábra

Most már csak azt kell belátnunk, hogy az *AD* szakasz a háromszög szögfelezője. *Megjelenítve az A csúcsnál lévő BAD és CAD szögek nagyságát, látjuk, hogy ezek valóban egyenlők.* A bizonyítás teljessé tételéhez ezt az egyenlőséget az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlőségével támasztjuk alá.

Megjegyzés

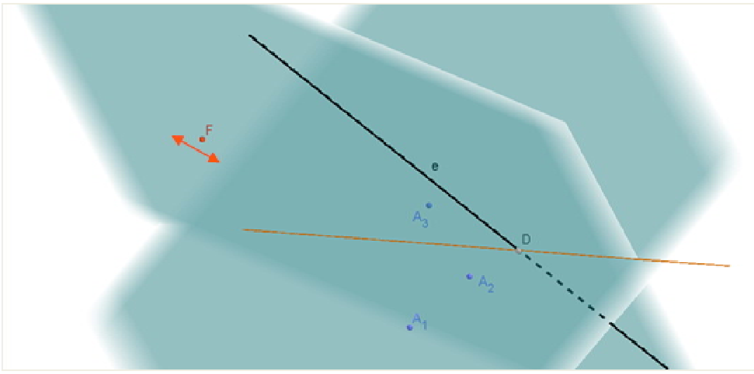
A fenti gondolatmenetben keveredik a kísérleti tapasztalat és a deduktív érvelés. A kísérletekre a bizonyítás gondolatmenetének kitalálása miatt van szükség, de a geometriai bizonyítás lényegének megértéséhez szükséges, hogy a tanulók röviden, deduktív módon le tudják vezetni a feltételekből kiindulva a bizonyítandó állítást.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes egy síkot metsz, akkor ez a metszéspont rajta van az egyenesre illeszkedő bármely sík és az eredeti sík metszésvonalán.

Megoldás

Adjunk meg egy síkot az A_1, A_2, A_3 pontokon keresztül, majd egy *e* egyenest, amely ezt a síkot a *D* pontban döfi. Jelöljünk ki a síkon kívül egy *F* pontot, majd illesszünk síkot az *F* ponton át az *e* egyenesre. Jelöljük ki a két sík metszésvonalát. Az *F* pont, és ezáltal az *e* egyenesen átmenő sík helyzetének változtatásával meggyőződhetünk arról, hogy a *D* metszéspont valóban rajta van a két sík metszésvonalán (*25. ábra*).



25. ábra

A térbeli ábra elkészítése segít a feladatban szereplő információk feldolgozásában. A *D* pontról tudjuk, hogy az egyrészt benne van az első síkban, hiszen az *e* egyenes ebben a pontban metszi azt, másrészt rajta van a második síkon, hiszen az illeszkedik az *e* egyenesre, aminek *D* a pontja, így *D* a két sík közös pontja. A két sík közös pontjai pedig egy egyenesre illeszkednek.

Megjegyzés

A rajzolás lépéseit követve tapasztalatot szerzünk arról, hogy milyen adatok határoznak meg egy síkot (három nem egy egyenesre illeszkedő pont vagy egy pont és egy a pontra nem illeszkedő egyenes). Megfigyeljük azt is, hogy két sík metszésvonala egyenes.

A térgeometriai feladatok megoldásának sikerét sok esetben a térszemlélet fejlettsége szabja meg. A GeoGebra programmal megrajzolva a térbeli szituációt, majd azt különböző nézetekből megvizsgálva könnyebben rájöhetünk a megoldásra.

Példa

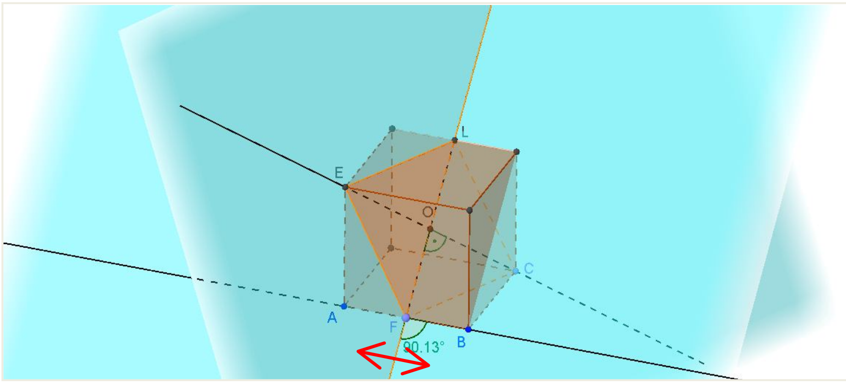
Egy kocka éle *a*. Mekkora az egyik testátlójának egy hozzá kitérő éltől való távolsága?

Megoldás

Vegyük fel a kockát, majd válasszuk ki az *AB* élét és a hozzá kitérő *EC* testátlóját. Tudjuk, hogy két kitérő egyenes távolsága egyenlő annak a szakasznak a hosszával, amelynek végpontjai az egyenesen vannak, és amely merőleges mindkét egyenesre (normál transzverzális). Vegyünk fel egy *F* pontot az *AB* egyenesen, és állítsunk ebből a pontból merőlegest az *EC* egyenesre, legyen a metszéspontjuk *O*. A keresett *OF* szakasz merőleges az *AB* egyenesre is. Az *F* pont helyét az *AB* élen megtalálhatjuk, ha figyeljük, melyik helyzetben lesz az *OF* és *AB* egyenesek szöge derékszög.

A rajzolóprogrammal azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy a keresett *O* pont a testátló felezőpontja, az *F* pedig az él felezőpontja. Vizsgáljuk meg, hogy ekkor az OF szakasz valóban merőleges-e a két kitérő egyenesre.

Illesszünk síkot az *E, O, F* pontokra, és egy másikat az *F, B, O* pontokra (*26. ábra*).



26. ábra

Mivel feltettük, hogy *O* a testátló középpontja, Az *FBO* sík a kocka átlósíkja, a *BG* lapátló valóban merőleges az *AB* élre, hiszen a lap síkjának minden egyenese merőleges az élre. Az *FO* egyenes párhuzamos ezzel a lapátlóval, tehát merőleges az *AB* élre.

Feltéve, hogy *F* az *AB* él felezőpontja, az *EFCL* négyszög rombusz, mert oldalai egyenlők (mindegyik egy *a* és *a/2* befogójú derékszögű háromszög átfogója). A rombusz átlói pedig merőlegesek egymásra, tehát az *OF* szakasz valóban (az egyetlen) normál transzverzálisa az *EC* és *AB* kitérő egyeneseknek. Ez azt jelenti, hogy az *FL* szakasz a kockalapátlójával egyenlő, míg az *OF* annak fele, azaz

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

További feladatok

- Két egymást metsző kör egyik közös pontjából húzzuk meg mindkettőben az átmérőt. Bizonyítsuk be, hogy az átmérők nem közös végpontjait összekötő egyenes átmegy a körök másik közös pontján.
- Egy hegyesszögű háromszög egyik oldalán levő magasság talppontból bocsássunk merőlegest a másik két oldalra. Igazoljuk, hogy ezek talppontjai és a kiindulásul vett oldal két végpontja egy körön helyezkednek el.
- Igazoljuk, hogy a trapézt átlói négy olyan háromszögre bontják, melyek közül valamelyik kettőnek a területe egyenlő.
- Határozzuk meg a kocka csúcsainak az egyik testátlótól való távolságát, ha az élhossza a.
- Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder egyik éle és a szemközti él felezőpontja által kifeszített sík a tetraédert két egyenlő térfogatú részre osztja.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Füleki L. & Szloboda T. (szerk.) (2005): *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

GeoGebra. http://www.geogebra.org/ (2015. 02. 10.)

Nánási Mónika (2014): *A geogebra program alkalmazása a geometriai transzformációk tanítása során* (szakdolgozat). Debreceni Egyetem.

2. Matematikatörténeti vonatkozások beépítése a tananyagba

HERENDINÉ KÓNYA Eszter

2.1. Nemeuklideszi geometriák modellezése gömbfelületen

Mind a NAT, mind a kerettanterv előírja, hogy a középiskolai matematikaoktatás keretein belül szó essen Bolyai Farkas és Bolyai János munkásságáról. Tekintettel arra, hogy kiemelkedő eredményeiket elsősorban a nemeuklideszi geometria területén érték el, ez nem egyszerű feladat. Ahhoz, hogy a tanulók betekintést nyerjenek a nemeuklideszi geometriák alapjaiba, az euklideszi geometria axiomatikus megalapozásából kell kiindulnunk. Az alapvető geometriai fogalmak és relációk szemléletessé tételében Lénárt István módszerét követjük, melynek lényege, hogy párhuzamosan tárgyalja ezeket az euklideszi síkgeometria, a gömbi geometria és a hiperbolikus geometria félgömb modelljének keretén belül (Lénárt, 2009). Ez a tárgyalásmód a geometriai fogalmak mélyebb megértését is szolgálja, nem csak a nemuklideszi geometriák bevezetését.

A geometriák axiomatikus megalapozása az alapfogalmak és az axiómák felsorolásával kezdődik. Ezt követik a további fogalmak, melyeket az alapfogalmakra támaszkodva definiálunk, valamint a tételek, melyeket az axiómákra támaszkodva bizonyítunk. A szigorúan axiomatikus felépítésben minden egyes tételt az axiómákból és a már elfogadott tételekből kizárólag logikai eszközökkel vezetünk le. A gyakorlatban ez az út nehézkes, sokszor körülményes, ezért hivatkozunk a szigorúan axiomatikus út mellett sokszor a szemléletre is. A mondanivaló szemléletessé tételéhez megalkotjuk a geometriai fogalmak és relációk modelljeit. Euklidesz ie. 300 körül állította össze a geometria tudományos rendszerét tartalmazó *Elemek* c. munkáját. Hilbert 1899-ben megjelenő *Grundlagen der Geometrie* c. könyvében az euklideszi geometria axiomatikus tárgyalását adja oly módon, hogy hozzáigazítja azt a modern matematikai logika követelményeihez. Szükségszerű tehát, hogy az alapvető geometriai fogalmakat elvonatkoztassuk a mindennapi életből megszokott, az euklideszi síkgeometriában használatos modelltől.

Első lépésként megvizsgáljuk, hogy hogyan jelennek meg az euklideszi geometriából jól ismert fogalmak a gömbi geometriában.

2.1.1. A gömbfelület geometriája

A *pont* jelentse ugyanazt az euklideszi síkon és a gömbfelületen.

Példa

Jelöljünk ki két pontot az euklideszi síkon ill. a gömbfelületen, majd határozzuk meg a legrövidebb utat a két pont között!

Megoldás

Az *egyenesnek* a gömbön a gömbi főkör felel meg.

Példa

Rajzoljunk egyenest az euklideszi síkra, ill. a gömbfelületre, majd jelöljük ki az egyenes egy pontját. Hány részre osztja ez a pont az egyenest?

Megoldás

Az euklideszi síkon az egyenest egy pontja két részre osztja, míg a gömbfelületen egy pontja nem osztja fel az egyenest. Tehát a *félegyenes* fogalma az euklideszi síkon értelmezhető, a gömbfelületen nem.

Példa

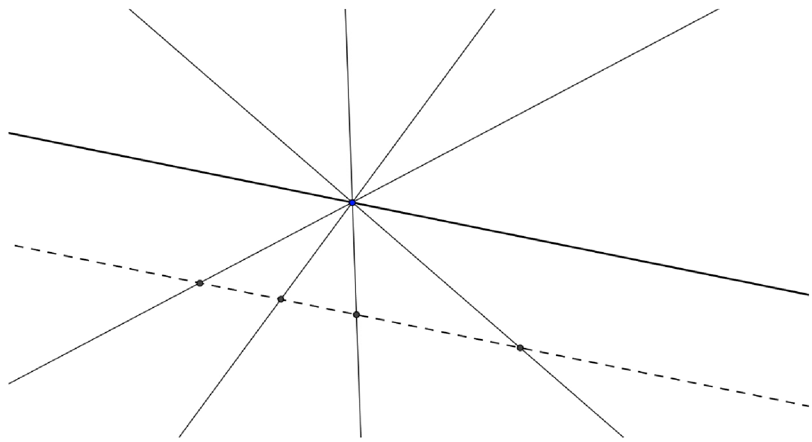
Jelöljünk ki az egyenesen két pontot. Hány részre osztja fel ez a két pont az egyenest? Jelöljünk ki a síkon két pontot. Hány egyenes húzható a két ponton keresztül?

Megjegyzés

A *szakasz* fogalma a gömbfelületen eltér az euklideszi fogalomtól.

Az egyenes a síkot két részre bontja. Az euklideszi síkon ez két végtelen tartomány, *félsík*, míg a gömbfelületen két véges tartomány. Itt a félsík fogalma nem értelmezhető.

Ha eltekintünk az egybeeső egyenesektől, akkor az euklideszi síkon két egyenes lehet *metsző* vagy nem metsző (*párhuzamos*). Ha tekintjük azokat az egyeneseket, amelyek egy adott pontra illeszkednek, akkor ezek között pontosan egy olyan egyenes található, amelyet egy, az adott ponton át nem menő egyenes nem metsz (*1. ábra*).



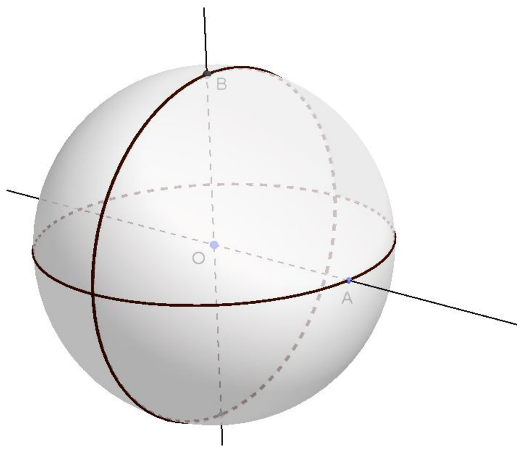
1. ábra

A gömbfelületen bármely két egyenes metszi egymást, mégpedig két (átellenes) pontban, tehát nem létezik a fenti tulajdonsággal bíró egyenes.

A *gömbi távolságot* gömbi főkörívekkel mérjük. A főkörívek mérését nem végezhetjük pl. cm-ben, hiszen az a különböző sugarú gömbök esetén eltér. A gömbi távolságegység: egy főkör hosszának 360-ad része. Tehát a gömbi távolságot fokokban mérjük. A leghosszabb távolság a gömbön 180°.

A gömbfelületen két szögszár két pontban metszi egymást, így a gömbfelületet két véges szögtartományra osztja. A *szög* nagyságát a gömbfelületen a következőképpen kapjuk meg: Meghosszabbítjuk a szög szárait mindaddig, míg egy gömbi főkör nem metszi mindkettőt. A kapott két metszéspont távolsága lesz a szög nagysága (fokokban).

Két egyenes az euklideszi síkon akkor *merőleges* egymásra, ha a síkot négy egybevágó végtelen tartományra bontják. A gömbfelületen ez a négy egybevágó tartomány véges. Két főkör pontosan akkor merőleges, ha az egyik sarkpontja a másik főkörre esik (*2. ábra*).



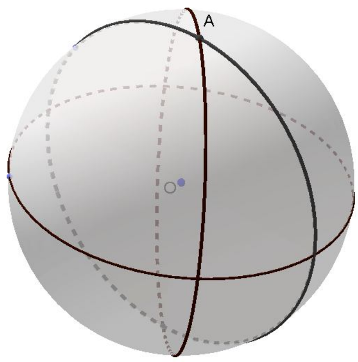
2. ábra

Példa

Lehetséges-e 3 olyan egyenest rajzolni, amelyek közül bármely kettő közös merőlegese éppen a harmadik?

Megoldás

Az euklideszi síkon két metsző egyenesnek nincsenek közös merőlegesei. A gömbfelületen két metsző egyenesnek van egy közös merőlegese. Ennek sarkpontja a két egyenes metszéspontja (*3. ábra*).

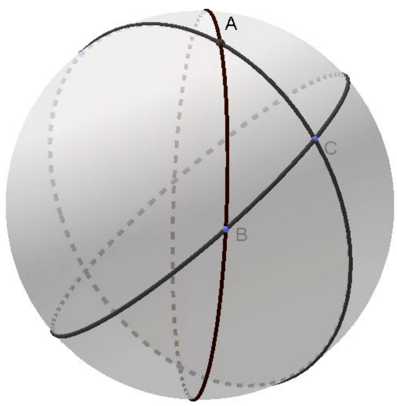


3. ábra

Pont és egyenes távolsága a gömbfelületen a ponton áthaladó, az adott egyenesre (főkörre) merőleges főkörív hosszát jelenti.

Feladat
Milyen messze van Debrecen az Egyenlítőtől?

Háromszöget úgy kapunk, hogy három, nem egy egyenesre eső pontot szakaszokkal összekötünk. A gömbfelületen ily módon nem egyetlen gömbháromszöget kapunk, hiszen két pontot két szakasszal is össze tudunk kötni. *Euler-féle gömbháromszögről* akkor beszélünk, ha a pontokat mindig a rövidebbik főkörívvel kötjük össze (*4. ábra*). Ennek a háromszögnek az oldalaira teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.



4. ábra

Feladat
Rajzoljunk olyan háromszöget a gömbfelületre, amely egyenlő oldalú és minden szöge derékszög!

Feladat
Az euklideszi sík szabályos háromszögeinek tulajdonságai közül melyek igazak a szabályos gömbháromszögekre?

A szabályos gömbháromszög egy-egy szögének nagysága 60°-tól 180°-ig terjedhet. Így a *háromszög belső szögeinek összege* 180° és 540° között lehet.

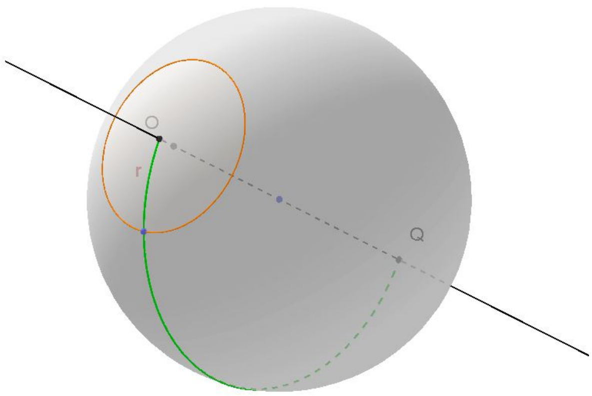
Feladat
Létezik-e olyan gömbháromszög, amelynek pontosan egy hegyes-, egy derék- és egy tompaszöge van?

Feladat
Mennyi a gömbi négyszög belső szögeinek összege?

A <u>*területmérés*</u> azt jelenti, hogy meghatározzuk, hogy az adott síkidom területe hányszorosa az egységül választott síkidom területének. Az euklideszi geometriában ez az egység az egységnyi oldalú négyzet. Ha a mérendő terület kisebb az egységnél, akkor az egységet fel kell darabolni egybevágó négyzetekre. A gömbfelületen a gömbi négyzet nem alkalmas területegységnek, mert nem tudjuk egybevágó négyzetekre bontatni. A gömbi területegység az a gömbháromszög, melynek két derékszöge van, a harmadik szöge pedig 1°.

A gömbfelületen az egymásba skatulyázott szabályos háromszögek (egyenlők az oldalaik és egyenlők a szögeik) azt mutatják, hogy a terület növekedésével nő a belső szögek összege. A szögösszeg azonban önmagában nem alkalmas területmérték, ugyanis nem additív mennyiség: Ha egy gömbháromszöget egyik csúcsán áthaladó egyenessel szétvágunk, akkor két háromszög keletkezik. Ezek szögösszegeit összeadva az eredeti háromszög szögösszegénél 180°-kal nagyobb értéket kapunk. A *szögfelesleg* (szférikus excesszus) nemnegatív és additív mennyiség, így alkalmas a terület mérésére.

Minden <u>*gömbi körnek*</u> két középpontja van (*5. ábra*). A sugár kisebb vagy egyenlő, mint 90°.

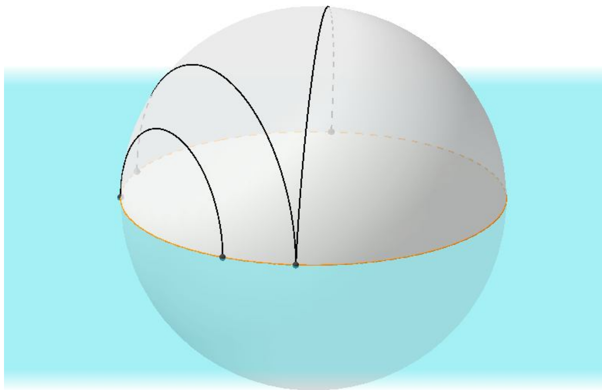


5. ábra

A gömbön nincsenek _hasonló háromszögek_: a gömbháromszöget három szöge egyértelműen meghatározza. (Ha megváltoztatjuk a sokszög méretét, az alakja is változni fog.)

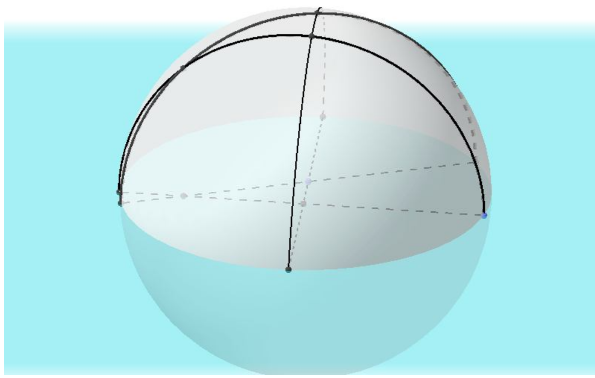
2.1.2. A hiperbolikus sík félgömbmodellje

A hiperbolikus geometriát a félgömbön szemléltetjük a következőképpen: Ponton a félgömb pontjait értjük, kivéve a félgömböt határoló kör pontjait. Az egyenes a félgömböt határoló kör síkjára merőleges félkör, a két végpont nélkül (*6. ábra*).



6. ábra

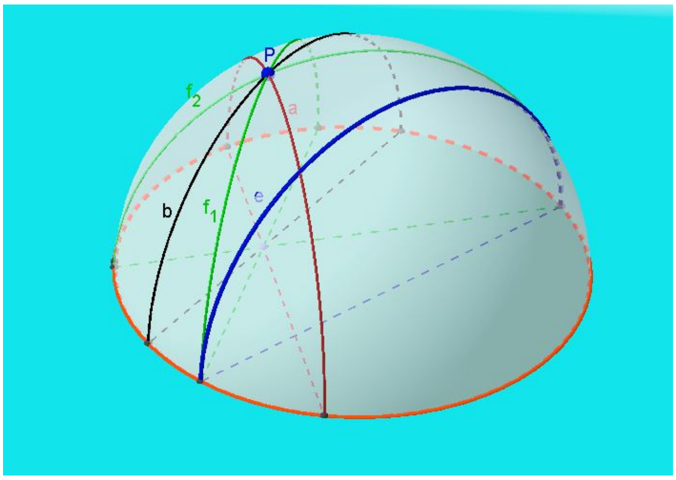
A háromszögek oldalait három, az alapkör síkjára merőleges sík és a gömb síkmetszeteiként kapjuk (*7. ábra*).



7. ábra

Amennyiben a háromszög egy, kettő vagy három csúcsa a félgömbfelület határoló körére esik, egyszeresen, kétszeresen vagy háromszorosan aszimptotikus háromszögekről beszélhetünk.

A Bolyai geometriát modellező félgömb egyeneseinek kölcsönös helyzete lehet metsző vagy nem metsző (*8. ábra*). A *P* ponton áthaladó *a* egyenes metszi az *e* egyenest, míg az f_1, f_2 és *b* egyenesek nem. Ez utóbbi esetet további két esetre bontjuk: megkülönböztetjük a párhuzamos (f_1, f_2) és az ún. ultraparallel egyeneseket (*b*).



8. ábra

Az adott ponton átmenő egyenesek között végtelen sok olyan van, amelyik nem metsz egy újabb, az adott ponton át nem menő egyenest.

Belátható, hogy a hiperbolikus geometriában a háromszögek területe a $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ szöghiánnyal arányos. Ebből az következik, hogy a hiperbolikus geometriában van maximális területű háromszög. A maximális területű háromszögnek minden szöge zérus, azaz szomszédos oldalai párhuzamosak (háromszorosan aszimptotikus háromszög vagy határháromszög).

2.1.3. A geometria axiomatikus megalapozásának történetéről

Euklidesz V. posztulátuma: Ha két egyenest úgy metsz egy harmadik egyenes, hogy a metsző egyenes egyik oldalán keletkező belső szögek összege két derékszögnél kisebb, akkor, ha az eredeti két egyenest végtelenül meghosszabbítjuk, metszeni fogják egymást, mégpedig a metsző egyenesnek azon oldalán, ahol a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

Az V. posztulátumot már Euklidesz sem tartotta elég szemléletesnek, ezért azt sejtette, hogy bizonyítható. A matematika története során ezzel a bizonyítással többen próbálkoztak eredménytelenül, a párhuzamossági axióma helyett újabb, ún. *helyettesítő axiómákat* feltételezve. Néhány ilyen állítás:

(1) Két párhuzamos (nem metsző) egyenes egyikét metsző egyenes a másikát is metszi. (Proklosz, V. sz.)
(2) Két párhuzamos (nem metsző) egyenes távolsága állandó. (Poszeidoniosz, i.e. I. sz.)
(3) Van legalább egy háromszög π szögösszeggel. (Saccheri, 1733)
(4) Nincs háromszög, amelyben mindegyik szög kisebb egy tetszőlegesen megadott kis szögnél. (Bolyai Farkas, 1820)
(5) Bármely három pont közös egyenesen vagy közös körön van. (Bolyai Farkas, 1851)
(6) Bármely háromszögnél van nagyobb területű háromszög. (Gauss, 1799)

Hilbert párhuzamossági axiómája (1899): Ha adott egy *e* egyenes és egy hozzá nem illeszkedő *P* pont, akkor az általuk meghatározott síkban csak egy olyan egyenes van, amely a megadott ponton áthalad, s a megadott egyenest nem metszi.

A párhuzamossági axióma elhagyásával nyert maradék axiómarendszerből felépíthető geometriát abszolút geometriának nevezzük. (Bolyai János). Az abszolút geometria és más geometriák viszonyának szemléltetéséhez először bemutatunk néhány abszolút geometriai tételt:

– Ha adott egy *e* egyenes és egy hozzá nem illeszkedő *P* pont, akkor a síkjukban létezik legalább egy olyan *f* egyenes, mely átmegy *P*-n és párhuzamos (nem metsző) *e*-vel.
– A háromszög szögösszege nem nagyobb két derékszögnél. (Legendre első szögtétele).
– Ha létezik egy olyan háromszög, amelynek szögösszege π, akkor mindegyik ilyen.
– Ha egy háromszög szögösszege kisebb, mint π, akkor egynél több olyan egyenes húzható, mely nem metszi *e*-t.

– Ha bármely két háromszög szögösszege egyenlő, akkor ez az összeg csak π lehet. Ha tehát a szögösszeg kisebb, mint π, akkor a szögösszeg változó mennyiség.

Bolyai párhuzamossági axiómája: Ha adott egy e egyenes és egy hozzá nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban legalább két olyan egyenes van, amely a megadott ponton áthalad, s a megadott egyenest nem metszi.

Példa

Fogalmazzuk meg a helyettesítő axiómák tagadását!

Megoldás

(1) Nem igaz, hogy két párhuzamos (nem metsző) egyenes egyikét metsző egyenes a másikát is metszi. $\Rightarrow$ Két párhuzamos egyenes egyikét metsző egyenes a másikat nem metszi.

(2) Nem igaz, hogy két párhuzamos (nem metsző) egyenes távolsága állandó. $\Rightarrow$ A sík azon pontjai, melyeknek egy e egyenestől vett távolsága állandó, nem alkotnak egyenest.

(3) Nem igaz, hogy van legalább egy háromszög π szögösszeggel. $\Rightarrow$ Bármely háromszög szögösszege kisebb, mint π.

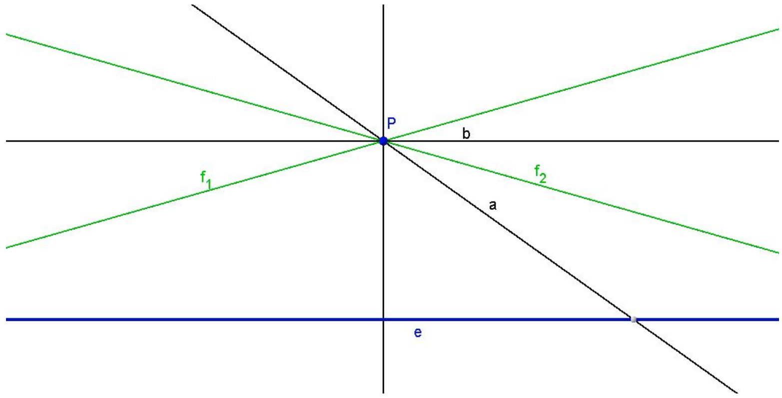
(4) Van olyan háromszög, amelyben mindegyik szög kisebb egy tetszőlegesen megadott kis szögnél.

(5) Nem igaz, hogy bármely három pont közös egyenesen vagy közös körön van. $\Rightarrow$ Létezik három olyan pont, amely nem illeszkedik egy egyenesre és nem illeszkedik egy körre. $\Rightarrow$ Van olyan háromszög, melynek oldalfelező merőlegesei nem metszik egymást egy pontban.

(6) Nem igaz, hogy bármely háromszögnél van nagyobb területű háromszög. $\Rightarrow$ Van olyan háromszög, amelynél nincs nagyobb területű háromszög.

Egyenesek kölcsönös helyzetének értelmezése a Bolyai-geometriában

Legyen adott az e egyenes és rajta kívül a P pont (*9. ábra*). Az f_1 és f_2 egyenes illeszkedik P-re és nem metszi e-t. Az f_1 és az f_2 egyenesek a síkot két-két egybevágó szögtartományra osztják. Mindazok az egyenesek, amelyek abban a két egybevágó szögtartományban haladnak, melyek egyike sem tartalmazza e-t (pl. b), ultraparallel (szuperpárhuzamos, nem metsző) egyeneseknek nevezzük. Az f_1 és f_2 egyeneseket pedig párhuzamosoknak (elpattanóknak).



9. ábra

A gömbi geometria és az abszolút geometria viszonya

A gömbi geometria a kétszeres Riemann geometria egy modellje. Mivel itt az egy egyenesre illeszkedő három pont esetén nem értelmezhető a *között* reláció, nem értelmezhetők a rendezési axiómák és az azokra épülő szakasz vagy szög fogalma sem. A Riemann-geometriának tehát nem része az abszolút geometria.

Felhasznált irodalom

Kálmán A. (2002): *Nemeuklideszi geometriák elemei*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Lénárt I. (2009): *Sík és gömb: összehasonlító geometriai kísérletek síkon és gömbön a Lénárt-gömb segítségével.* Budapest: Lénárt Oktatási, Kereskedelmi és szolgáltató Bt.

Reiman I. (1986): A *geometria és határterületei*. Budapest: Gondolat.

2.2. Klasszikus feladatok az ókori és a középkori matematikából

2.2.1. Az algebrai gondolkodás kialakulása

Az algebra hosszú időn keresztül az egyenletek megoldását és vizsgálatát jelentette. A ma szokásos algebrai jelölések bevezetése előtt egyenletekre vezető feladatok megoldáshoz „recepteket” dolgoztak ki.

Az egyiptomi papiruszokon az aritmetikai feladatok mellett algebrai (egy ismeretlenes egyenletekre vezető) feladatokat is találunk. Ezek megoldása aritmetikai úton történt a „hamis feltevés” vagy *„regula falsi”* módszerrel.

Példa

„Egy sokaság és negyede összesen tizenöt, mennyi a sokaság?” (Filep, 1997: 46)

Megoldás (mai)

Jelöljük az ismeretlen sokaságot x-szel.

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

$5x = 60$

$x = 12$

Ell: $12 + 3 = 15$

Megoldás (egyiptomi)

Vegyünk egy próbamegoldást, vagyis tegyünk egy (valószínűleg) hamis feltevést: legyen a sokaság pl. 4 (ennek könnyű a negyedét venni). Ekkor $4 + 1 = 5 \neq 15$. Mivel az 5-öt 3-szor kell venni, hogy 15-öt kapjunk, ha 4 helyett 3-szor 4-et, azaz 12-t veszünk, megkapjuk a megoldást.

Megjegyzés

A próbálgatással történő egyenletmegoldás ma is használatos módszer az általános iskolában. A konkrét számmal végzett műveletek rávezethetik a tanulót a szöveg és az egyenlet struktúrájának megértésére.

A „regula falsi” eljárást megtaláljuk az első magyar aritmetika könyvekben is. A bemutatott feladatokat ugyancsak aritmetikai, nem pedig algebrai eszközökkel oldották meg.

Példa

„Edgy lánytól kérdik a Leányt-Kérők, hány Esztendős; Ama felel: Az Anyám, ugymond, harmad-fél annyi idős, mint én; az Atyám pedig három

annyi idős. A hármunk ideje tészenmind öszve 117 Esztendőt. Kérdés, hány Esztendős vólt? Fogjuk rá, hogy 14 Esztendős vólt.” (Maróthi, 1782: 236.).

Megoldás (mai)

Tegyük fel, hogy a lány *x* éves. A harmadfél 2,5-et jelent (ahogy a másfél 1,5-et). Az anyja $\frac{5}{2}x$, az apja *3x*. Megoldva az $x+\frac{5}{2}x+3x=117$ egyenletet, kapjuk, hogy a lány 18 éves.

Megoldás (Maróthinál)

Tegyük fel, hogy a lány 14 éves. Ekkor az anyja 35, az apja 42 éves. Hárman együtt 91 évesek. A lány valódi életkora úgy aránylik a 14-hez, mint a 117 a 91-hez, azaz $14\cdot\frac{117}{91}=18$ éves.

Megjegyzés

A módszert azoknál a feladatoknál alkalmazták, amelyek $ax = b$, $ax^2 = b$ típusú egyenletre vezetnek.

Feladat

Oldjuk meg a következő, Bhászkara hindu matematikustól származó, feladatot mai és a „regula falsi” módszerrel: *„Tiszta lótuszvirágok kötegéből egy harmad, egy ötöd illetve egy hatod Siva, Visnu illetve Szurja isteneknek van szentelve, egy negyede pedig Bhaváni istennőé. A megmaradt hat virágot egy nagy tekintélyű tisztviselő kapja. Mondd meg gyorsan a lótuszvirágok számát”* (Filep, (1997: 116).

A babiloni algebrában szimbólumokat szintén nem használtak, a feladatot szövegesen adták meg. Az ékírásnak köszönhetően ugyanakkor már jelentkezett egyfajta jelrendszer és a szimbolikus gondolkodásmód, mert például a hosszúság és a szélesség szót egy-egy jellel írták le.

Példa Babilonból

„A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadom a területhez, és 3,3-at (183-at) kapok. A hosszúság és a szélesség összeadva 27. Mi a hosszúság, a szélesség és a terület?” (Sain, 1986: 29).

Megoldás (mai)

Jelölje a téglalap két oldalát *x* és *y*. A téglalap területe ekkor $t = xy$.

$xy + x - y = 183$ és $x + y = 27$

$x = ? y = ? t = ?$

Fejezzük ki a második egyenletből y-t és helyettesítsük be az első egyenletbe: $x(27 - x) + x - 27 + x = 183$

Rendezés után: $x^2 - 29x + 210 = 0$

A másodfokú egyenlet gyökei:

$x_1 = 14$ és $x_2 = 15$

$y_1 = 27 - 14 = 13$ és $y_2 = 27 - 15 = 12$

$t_1 = 14 \cdot 13 = 182$ és $t_2 = 15 \cdot 11 = 180$

Ellenőrzés:

$14 \cdot 13 = 182$, $182 + 1 = 183$.

$15 \cdot 12 = 180$, $180 + 3 = 183$

Megoldás (babiloni)

„Eljárásod ez legyen: 27-et, a hosszúság és szélesség összegét add a 183-hoz: 210.” Adjuk össze a két egyenletet: $xy + x - y + x + y = 183 + 27$, azaz $x(y + 2) = 210$.

„2-t a 27-hez add hozzá: 29.” A második egyenlet mindkét oldalához adjunk 2-t: $x + y + 2 = 29$. Ekkor előállítottunk két olyan egyenletet, melyek közül az egyik jobb oldalán két ismeretlent tartalmazó kifejezés szorzata, a másik jobb oldalán pedig összege szerepel. Az egyenletek bal oldalain egy-egy szám áll: $v \cdot z = a$ és $v + z = b$. Az ilyen típusú egyenletrendszert a babiloniak

$$v = \frac{b}{2} + u \text{ és } z = \frac{b}{2} - u$$

helyettesítéssel oldották meg: *„29-ből letöröd a felét, 14,5-szer 14,5 az 210, 25. Levonsz 210-et a 210,25-ből. A különbség 0,25. Négyzetgyöke 0,5.”*

$$\left(\frac{29}{2} + u\right)\left(\frac{29}{2} - u\right) = 210$$

$$\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210 = u^2$$

$$u = 0{,}5$$

„Az első 14,5-höz add hozzá a 0,5-et: a hosszúság 15. Kivonsz a második 14,5-ből 0,5-et: a szélesség 14. Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, levonod a 14-ből, a szélességből: 12 a végleges szélesség.”

$x = 14,5 + 0,5 = 15$
$y + 2 = 14,5 - 0,5 = 14$
$y = 14 - 2 = 12$

„A 15 hosszúságot a 12 szélességgel összeszoroztam: 15-ször 12 az 180. Ez a terület. A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3-mal haladja meg. 3-at adj a 180 területhez: 183."

Megjegyzések

– A babiloniak nem ismerték a negatív számokat, így a feladat két megoldása közül csak az egyiket kapták meg.
– A megoldás során használt $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságot ismerték, sablonként használták.

Feladat

Fogalmazzuk át mai feladattá, majd alkalmazzuk az új ismeretlen bevezetésének fenti módszerét a következő feladatra: *„A szélesség meg a hosszúság 30. A terület 221. Mekkora a szélesség és a hosszúság?"* (Filep, 1997: 53).

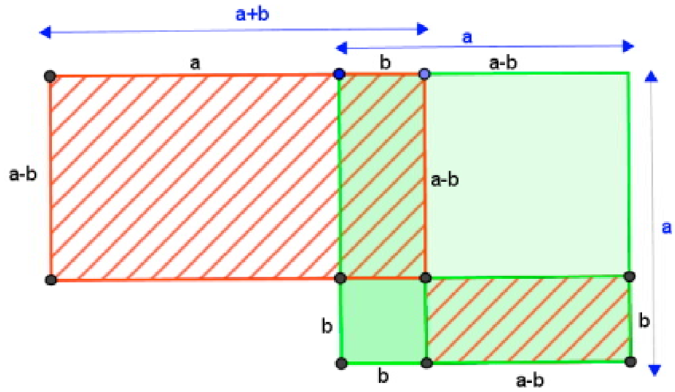
Euklidész Elemek c. munkájában a geometriai algebra témakörébe tartozó tételek is találhatók. Az algebrai összefüggéseket szakaszok és arányaik, valamint területek segítségével vizsgálta. A középiskolában tanított nevezetes algebrai azonosságok igazolása téglalapok átdarabolásával történik.

Példa

Ábrázoljuk téglalapokkal az $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságot.

Megoldás (Euklidész: Elemek 2. könyv 5. tétel)

Vegyük fel az $a + b$ és $a - b$ oldalú téglalapot, majd egészítsük ki a *10. ábra* szerint.



10. ábra

A szakaszok szorzatának geometriai jelentését (téglalap területe) használva látható, hogy az $a + b$ és $a - b$ oldalú téglalap területe egyenlő az a és a b oldalú négyzetek területének különbségével.

További feladatok

Szemléltessük geometriai úton a következő algebrai azonosságokat:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

A görögök és utánuk az arabok is geometriai úton oldották meg a speciális egyenleteket. Az arab matematikus Al-Hvárizmi könyve volt az első, amely az algebrát a geometriától független tudománnyá tette. Az egyenletek megoldásához három fajta „számot" használt: a gyököt *(x),* a négyzetértéket *(x^2)* és az egyszerű (pozitív) számot. Az első és másodfokú egyenletek típusait vizsgálta, az egyes egyenleteket egyenletrendezéssel (al-dzsabr = helyrerakás, mukabala = összevonás, egyszerűsítés) az alaptípusuk valamelyikévé alakította.Az egyenletek megoldását szavakkal írta le, ugyanakkor szükségesnek tartotta a megoldás geometriai igazolását is.

Példa (Al-Hvárizmitől)

„Egy négyzet és 10 gyök egyenlő 39 dirhammal (pénzegység), azaz ha hozzáadsz 10 gyököt egy négyzethez, akkor az összeg 39.” (Filep, 1997: 121) Mai nyelven: Oldjuk meg az $x^2 + 10x = 39$ egyenletet.

Mai megoldás

a) Megoldóképlettel:

$x^2 + 10x - 39 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 39}}{2} = \frac{-10 \pm 16}{2}$$

$x_1 = 3$, $x_2 = -13$

b) Teljes négyzetté alakítással:

$x^2 + 10x = 39$

$(x + 5)^2 - 25 = 39$

$(x + 5)^2 = 64$

$x + 5 = \pm 8$

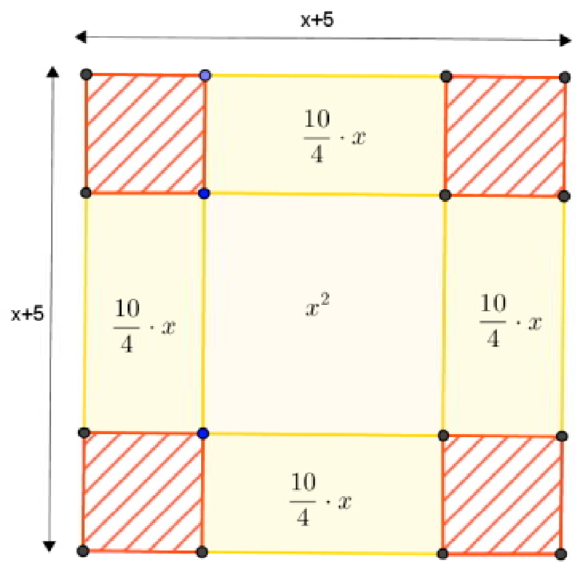
$x_1 = 8 - 5 = 3$, $x_2 = -8 - 5 = -13$

Al-Hvárizmi megoldása

„A megoldás így megy. Vedd a gyökök számának felét, tehát ebben az esetben ötöt, szorozd meg ezt a számot önmagával, s a szorzat 25. Add ezt hozzá 39-hez, ez 64-et tesz ki. Vonj négyzetgyököt, vagyis 8, és vond ki belőle a gyökök számának felét, mármint ötöt, marad 3. Ez a megoldás.” (Filep, 1977: 121)

Jól látható, hogy a megoldás a teljes négyzetté alakítás módszerére épül.

A teljes négyzetté kiegészítés geometriai igazolása (*11. ábra*):



11. ábra

Vegyük fel először a középső (sárga) x oldalú négyzetet. Mind a négy oldala fölé rajzoljunk egybevágó téglalapokat, melyek másik oldala $\frac{10}{4}$. Így a sárgával jelölt alakzatok területének összege az egyenlet jobb oldalát adja. Az ábra úgy egészíthető ki négyzetté, hogy 4 darab $\frac{10}{4}$ oldalhosszúságú négyzetet rajzolunk hozzá. Ezek területének összege 25, míg a nagy négyzeté $(x + 5)^2 = 25 + 10x + x^2 = 25 + 39$.

Feladat

Oldjuk meg Al-Hvárizmi módszerével az

a) $2x^2 + 10x = 48$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$ egyenleteket. Rajzoljuk meg a teljes négyzeteket is!

Az algebra fejlődésének kezdeti, ún. retorikus szakaszát csak hosszú idő után váltotta fel a szimbolikus szakasz. Diophantosz (250 körül) már használta az egyenlő, ismeretlen, négyzete, köbe, kivonás jelét. Nemorariusnál (?–1236) a betűszám már nem szakaszként jelent meg, s a szorzathoz sem társította a téglalapot, hanem egyetlen számnak tekintette. Ahhoz, hogy általános alakú egyenletek megoldási módszereit megismerjék, algebrai jelölésrendszer kifejlesztésére volt szükség. Az első próbálkozások Pacioli (1445?–1517) és Chuquet (1445?–1500?) nevéhez köthetők, és főleg szórövidítésekből álló algebrai jelrendszer megalkotására irányultak, például:

$6^3\tilde{p}4^2\tilde{m}2^1\tilde{p}3^0$ *egaulx* $\tilde{m}5$,

ami mai írásmódban: $6x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = -5$

Az algebrai szimbólumhasználat kialakulásához Viéte (1540-1603) munkája nagyban hozzájárult. Bevezette a betűegyütthatókat, az ismeretleneket magánhangzókkal, az ismert mennyiségeket pedig mássalhangzókkal jelölte. Pl.: *A_2cubus –B latusin A_3quadratumaequatur C solido*, ami mai írásmóddal: $2x^3-3Bx^2=C$. Az ismeretlent *A*-val jelölte, a hatványait betűkkel írta ki: *cubus = köb*, *quadratum = négyzet*. A szorzást az *in* szóval jelölte, míg az összeadásra és kivonásra a mai jeleket használta. Megfigyelhető a geometriai értelmezés megtartása is: az együtthatóként szereplő számok mellett azok dimenziójára is utal: *B latus = B oldal*, *aequatur = egyenlő*, *C solido = Ctest*. Érdekesség, hogy az egyenlőséget szóval *(aequatur)* írta ki. Az egyenlőségjelet jelet csak 1557-ben vezette be az angol Recorde. Viéte kidolgozta az algebrai mennyiségekkel való számolás szabályait, a „betűszámtant". Ezzel lehetővé vált, hogy az egyes egyenlettípusok megoldásának általános eljárását ne egy-egy konkrét példán bemutatva szavakkal írják le.

Feladat

Írjuk fel Chuquet, majd Viéte jelölésével az a) $x^3 + 63x = 316$, b) $x^3 + 3ax = b$ egyenleteket!

2.2.2. A tökéletes és a barátságos számok

A számelmélet a matematika egyik legrégebbi ága, eredete visszanyúlik a számmisztikába. Megalapítói a pitagoreusok voltak, akik megalkották a páros, páratlan, tökéletes, barátságos és figurális számok, valamint a prímszám és összetett szám fogalmát. Számon, ebben az időben, természetes számot értettek, ugyanúgy, ahogy az általános és középiskolában ebben a számkörben vizsgáljuk az oszthatósági kérdéseket.

A pitagoreusok a számoknak misztikus jelentést tulajdonítottak. Az „egyet” nem is tekintették igazi számnak, hanem az összes szám eredetének, amely nem bontható részekre, osztani nem lehet (nincs osztója), csak többszörözni. Páros számoknak a két egyenlő részre osztható számokat nevezték, míg páratlanoknak azokat, amelyek nem oszthatók két egyenlő részre. Ebben az értelemben az 1 se nem páros, se nem páratlan szám. A páros számokat női, a páratlanokat férfi jellegűnek tekintették. Az 1 a lényeg száma, a 2, az első női szám, a különbözőséget, míg a 3 a harmóniát jelenti, hiszen az az egység és a különbözőség összege. A 4 az igazság száma, mert a különbözőség önmagával való szorzata. Az első női és férfi szám összege, a 2 + 3 = 5, a házasság jelképe volt.

A pitagoreusok azt vizsgálták, hogy a számokat kavicsokkal milyen geometriai alakzatban tudják kirakni. Ez a módszer jól mutatja a számelméleti fogalmak geometriai reprezentációját, és így jól használható azok tanításában is. A prímszámokat vonalszámoknak nevezték, mert csak egy sorban rakhatók ki. Ezzel szemben az összetett számok (síkszámok) két valódi tényezőre bonthatók, tehát kirakhatók téglalap alakban. A téglalapszámok közül azokat, amelyek két egyenlő tényező szorzatára bonthatók, azaz kirakhatók négyzet alakban, négyzetszámoknak nevezték, és nevezik ma is. (Ezek mellett a számok mellett ma négyzetszámnak tekintjük a 0-t és az 1-et is.)

Feladat

Kirakhatók-e korongokkal téglalap alakban a következő számok? a) 5; b) 15; c) 25; d) 45. Melyik az a szám, amelyik kirakása többféleképpen is megtörténhet? Határozzuk meg az egyes kirakásokhoz tartozó kéttényezős szorzatokat!

Megjegyzés

A számok geometriai megjelenítése a számelméleti fogalmak mélyebb megértését szolgálja. A többféle kirakási mód megkeresése a tanulók kreativitását is fejleszti.

Az osztók összege alapján többféle számcsoport alkotható.

Tökéletes számnak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyek megegyeznek osztóik összegével (az 1-et beleértve, önmagukat kivéve). A legkisebb tökéletes szám a 6, amelynek önmagánál kisebb osztói az 1, a 2 és a 3, ezek összege pedig 1 + 2 + 3 = 6. Azt gondolták, hogy a 6,

„részeinek integritása és a benne rejlő egyezség következtében a házasság és az igazság és a szépség” jelképe. A második legkisebb tökéletes szám a 28, melynek osztói az 1, 2, 4, 7 és 14 számok. A soron következő két tökéletes szám a 496 és a 8128. Később, a kereszténységben a tökéletes számoknak vallásos jelentőséget is tulajdonítottak. Szent Ágoston is írja Az Isten városáról c. művében, hogy Isten azért teremtette hat nap alatt a Földet (bár egy pillanat alatt megtehette volna), mert a hat tökéletes szám. A Hold is hasonló okból kerüli meg a Földet éppen 28 nap alatt.

Feladat
Ellenőrizzük, hogy a 496 és a 8128 számok valóban tökéletesek!

Példa
Mutassuk meg, hogy az első négy tökéletes szám felírható $2^{n-1}(2^n-1)$ alakban (Euklidesz felfedezése).

Megoldás
n = 2-re: $2^{2-1}(2^2-1)=6$
n = 3-ra: $2^{3-1}(2^3-1)=28$
n = 5-re: $2^{5-1}(2^5-1)=496$
n = 7-re: $2^{7-1}(2^7-1)=8128$

Példa
Eukleidész bebizonyította, hogy minden olyan esetben, amikor 2^n-1 prím, $2^{n-1}(2^n-1)$ tökéletes szám. Az n helyére konkrét számokat behelyettesítve értelmezzük ezt az állítást!

Megjegyzés
A fenti tétel elemzése lehetőséget nyújt a matematikai logikai ismeretek elmélyítésére is, hiszen az implikáció igazságtáblázatának vizsgálatát kéri.

Azokat a prímeket, amelyek felírhatók 2^n-1 alakban, Mersenne-prímeknek nevezzük. Nikomakhosz (Kr. u. I. sz. vége) *Bevezetés az aritmetikába* c. művében megfogalmazta a sejtést, hogy Eukleidész képlete, $2^{n-1}(2^n-1)$ az összes páros tökéletes számot kiadja. (Ezt több mint másfél ezer évvel utána Euler bizonyította be.) Az ötödik tökéletes számot Regimontanus (1436–1476) találta meg: n = 13 esetén a $2^{13}-1$ prímszám, innen kapjuk a 33550336-ot, ami valóban tökéletes szám. Nem ismert, hogy végtelen sok tökéletes szám van-e, illetve nyitott kérdés, hogy léteznek-e páratlan tökéletes számok. 2013-ban találták meg a 48. Mersenneprímszámot, ez a $2^{57\,885\,161}-1$, amely 17 425 170 számjegyből áll. Jelenleg ez a legnagyobb ismert prímszám. Ebből a Mersenne-prímből képezhető tökéletes szám: $2^{57\,885\,160}\cdot(2^{57\,885\,161}-1)$.

Feladatok

– A tökéletes számok osztóinak (az 1-et és saját magukat is beleszámítva) reciprok értékeit összeadva mindig 2 lesz az eredmény.

– Az ismert többjegyű tökéletes számok számjegyeit egymással összeadva, majd az eredmény számjegyeit újra összeadva, mindaddig amíg egy számjegyet kapunk, mindig 1 lesz a végeredmény.

Ellenőrizzük az állításokat az első négy tökéletes számra!

A tökéletes szám fogalmára alapozva értelmezhetők a szűkölködő és a bővelkedő számok. Ha a szám osztóinak (kivéve magát a számot) összege kisebb, mint a szám akkor *szűkölködőszámról* beszélünk. Például: 15 osztói: 1; 3; 5. Ezek összege 1 +3 + 5 = 9 < 15. Tehát a 15 szűkölködő szám. *Alig-alig (kissé) szűkölködőnek* mondunk egy számot, ha nála kisebb osztóinak összege éppen 1-gyel kevesebb a számnál. Ilyen például a 8, mert osztói:1; 2; 4. Ezek összege 1 + 2 + 4 = 7.

Feladatok

– Keressünk néhány szűkölködő és kissé szűkölködő számot!

– Mutassuk meg, hogy az összes kettő hatvány kissé szűkölködő szám.

Ha a szám osztóinak összege (kivéve magát a számot) nagyobb a számnál, akkor azt a számot *bővelkedő számnak* nevezték, nevezzük. Például 18 osztói: 1; 2;, 3; 6; 9. Ezek összege: 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21 > 18. Tehát a 18 bővelkedő szám. *Alig-alig bővelkedő* egy szám, ha a nála kisebb osztóinak összege éppen 1-gyel nagyobb, mint maga a szám. Példa nincs, mert nyitott kérdés, hogy létezik-e alig-alig bővelkedő szám.

Feladat

Adjunk meg néhány bővelkedő számot!

Barátságos számpárok

A pitagoreusok a 220-at és a 284-et a barátság szimbólumának tekintették, és *barátságos számpárnak* nevezték, mivel az egyik szám részeiből összeáll a másik, azaz mindkét szám önmagánál kisebb osztóinak összege a másik számot adja. A 220 (önmagánál kisebb) osztóinak összege: 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284. A 284 (önmagánál kisebb) osztóinak összege: 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220. Azt tartották, hogy ha két ember kicserél egy-egy ilyen számot viselő talizmánt, akkor az örök barátságot létesít közöttük. A középkorban azt gondolták, hogy ha egy talizmánon a 220 vagy a 284 szerepelt, akkor annak tulajdonosa szerencsés lesz a szerelemben.

A következő barátságos számpárt (17296, 18416) csak több mint kétezer év múlva, 1636-ban találta meg Fermat. A 18. században Euler 64 újabb számpárt fedezett fel, melyek közül kettőről azonban kiderült, hogy valójában barátságtalanok. 1830-ban Legendre talált egy újabb számpárt. 1867-ben egy 16 éves olasz diák lepte meg a világot azzal, hogy észrevette, az 1184 és az 1210 barátságos számpár.

Feladat

Igazoljuk, hogy az 1184 és az 1210 barátságos számpár.

Megjegyzések

– A barátságos számpárok közül mindig a kisebb a bővelkedő, és a nagyobb a szűkölködő.
– 2003 februárjában több, mint 4 millió barátságos számpár volt ismert. Közülük a legnagyobb szám 5577 jeggyel írható le tízes számrendszerben. Erdős Pál egy sejtése szerint végtelen sok barátságos számpár van.

Ha egy számból kiindulva sorozatot képezünk azzal a szabállyal, hogy a sorozat következő eleme az előző elem önmagával nem egyező osztóinak összege, akkor *barátságos lánchoz* jutunk. Egy ilyen lánc végződhet prímszámban, tökéletes számban, vagy ciklikussá válhat, befutva egy barátságos számpárba, vagy egy barátságos hurokba.

Példa

Alkossunk barátságos láncot a 30-ból a kiindulva!

Megoldás

A 30 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15. Ezek összege 42.
A 42 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21. Ezek összege: 54.
Az 54 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27. Ezek összege: 66.
A 66 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33. Ezek összege: 78.
A 78 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39. Ezek összege: 90.
A 90 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45. Ezek összege: 144.

A 144 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72. Ezek összege: 233.
A 233 önmagánál kisebb osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 24, 36, 48, 72. Ezek összege: 233.
A 233 prím, így itt a barátságos lánc véget ér.

Ajánlott és felhasznált irodalom

Sain M. (1986): *Nincs királyi út!* Budapest, Gondolat.
Filep L. (1997): *A tudományok királynője*, Budapest, Typotex.
Maróthi Gy. (1782): *Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége*, Debrecen.
Pálfalvi J.-né (1990): *Barátkozzunk a számokkal*, Budapest, Tankönyvkiadó.
Szénássy B. (2008): *A magyarországi matematika története a 20. század elejéig*, Szeged, Polygon.
Largest known prime number, http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_known_prime_number (2015. 02.25.)

3. Analógiák az aritmetika, halmazok, logika, események témakörében

PAULOVITS György

3.1. A halmaz- és Boole-algebra tanítása

A középiskolai matematika-oktatás első fejezete a halmazelmélet. Ennek részeként a halmazműveletek bevezetésekor látnunk és érzékeltetnünk kell, hogy e műveletek egységes rendszert alkotnak, és bár nem mondjuk ki, de értelmezésükkel egy algebrát hozunk létre, azaz a későbbi analógiák érdekében is érdemes láttatnunk, hogy egy egyváltozós („tagadás-jellegű”), és két kétváltozós („szorzás-”, illetve „összeadás-jellegű”) műveletet vezetünk be, a megfelelő – és a későbbiekben is azonos jellegű – tulajdonságokkal. Az a tény azonban mindenképpen hangsúlyt kell, hogy kapjon, hogy e halmazelméleti műveleteket egy alaphalmaz részhalmazai között tudjuk definiálni.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A \subseteq H$. Ekkor az A (H-ra vonatkozó) *kiegészítő halmaza (komplementere)* mindazon H-beli elemek halmaza, amelyek nincsenek benne A-ban.

Jele: $\overline{A}$.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A, B \subseteq H$. Ekkor az A és B halmazok *metszete* mindazon H-beli elemek halmaza, amelyek A-ban és B-ben is benne vannak.

Jele: $A \cap B$.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A, B \subseteq H$. Ekkor az A és B halmazok *uniója (egyesítése)* mindazon H-beli elemek halmaza, amelyek A-ban vagy B-ben vannak. Jele: $A \cup B$.

A definiálás mellett ki kell térnünk e műveletek elsőbbségi sorrendjére (1. egyváltozós, 2. szorzás-jellegű, 3. összeadás-jellegű), valamint a legfontosabb tulajdonságokra, elsősorban a kommutativitásra, az asszociativitásra és a disztributív törvényekre:

$$(A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

illetve

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)),$$

továbbá a két de Morgan-azonosságra:

($\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, illetve $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$).

Mindezeket „bizonyítani” is érdemes, legalább a középiskolában elfogadott, Venn-diagrammal történő szemléltetéssel. A műveleteknél, például a disztributív törvények esetén, sokszor akkor is érdemes kitenni a zárójelet, ha az elsőbbségi sorrend ezt nem indokolná – a megértést könnyíti a zárójelhasználat. Érdemes ugyanakkor felhívni a figyelmet a redundáns zárójelek nélküli alakra is (például az első disztributív törvény így is írható: $A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$)!

A fenti műveletek mellett külön szoktuk definiálni a halmazok közti kivonást is, bár ennek eredménye a már definiált műveletekkel is előállítható ($A\setminus B=A\cap\overline{B}$).

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A,B\subseteq H$. Ekkor az A és B halmazok $A\setminus B$ különbségén azon H-beli elemek halmazát értjük, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem.

A különbség definiálása után meg kell említenünk a szimmetrikus differencia műveletét ($A\setminus B$)$\cup$($B\setminus A$)), már csak azért is, mivel ez a logika „kizáró vagy” műveletével mutat szoros rokonságot.

A műveleteket, azok tulajdonságait számos különböző feladattípuson gyakorolhatjuk. Ezek egy része „klasszikus” halmazos feladat.

Példa

Határozzuk meg az *A, B, C* halmazokat, ha tudjuk, hogy

(1) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

(2) $A\cap(B\cup C)=\{1,3,5,6\}$,

(3) $C\setminus(A\cup B)=\{8\}$

(4) $A\setminus B=\{1,2,6,7\}$,

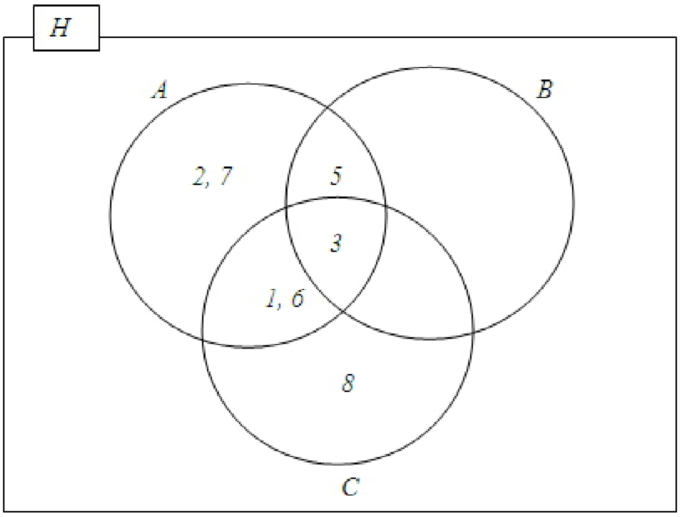
(5) $B\cap C=\{3\}$.

Megoldás

A halmazábra kitöltését „belülről” érdemes kezdeni. Itt azonban a (3) feltételben szereplő 8-as számot tudjuk először elhelyezni. A (2) és az (5) együttesen kijelöli a 3-as szám helyét, majd a (2) és a (4) összevetése kijelöli az 1, 6, 5 elhelyezkedését. Ugyanebből következik a 2 és a 7 helye is. Az egyes halmazok:

$A = \{1,2,3,5,6,7\}$, $B = \{3,5\}$, $C = \{1,3,6,8\}$,

a kitöltött halmazábra pedig az *1. ábrán* látható.



1. ábra

Az intervallumokkal végzett műveletek gyakorlása is rendkívül fontos, hiszen később, például az egyenlőtlenségek megoldása vagy a függvények értelmezési tartományának meghatározása során nagy hasznát vehetjük.

Példa

Legyen az alaphalmaz az *R,* legyen továbbá $A = [-1;3], B = [1;5[$! Adjuk meg intervallum-jelöléssel, és ábrázoljuk a számegyenesen a következő műveletek eredményét:

a) $\overline{A}$ b) $A \cap B$ c) $B \setminus A$ d) $\overline{A} \cap \overline{B}$

Megoldás

Elsősorban az intervallumok végének beállításában tévednek az ilyen típusú feladatok megoldásában a diákok, úgyhogy erre mindenképpen oda kell figyelnünk:

a) $\overline{A} = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]3;\infty\right[$

b) $A \cap B = \left[1;3\right]$

c) $B \setminus A = \left]3;5\right[$

d) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \left]-\infty;-1\right[\cup \left[5;\infty\right[$

A középiskolai tanárok visszatérő dilemmája: hogyan, milyen formában, mikor foglalkozzunk a logikai alapismeretekkel, mikor öntsük formába mindazt az ismeretanyagot, ami nélkül egyetlen tételt sem tudnánk kimondani, bizonyítani, illetve ami nélkül feladatokat sem tudnánk megoldani. Hiszen minden ilyen esetben logikai műveleteket végzünk, állítások igazságtartalmáról döntünk, még ha a formális logika elemeinek becsempészése nélkül is. A tantervek, és így a tankönyvek többsége is a szőnyeg alá sepri ezt a gondot, és nem, vagy csupán a 12. évfolyamon foglalkozik a logikával, pedig már a 9. évfolyamon, a halmazelméleti alapozás után szükséges legalább néhány órát e tárgykörnek szentelni. Ezt már csak azért is célszerű ekkor megtennünk, mert a gondosan bevezetett halmazalgebrai ismeretanyag óriási segítségünkre lehet a Boole-algebra felépítésében, elsajátításában.

A logika alapfogalmainak – *ítélet (kijelentés, állítás)*, illetve az *igaz, hamislogikai érték* – tisztázása után egyszerű kombinatorikai alapfeladatként felismertethetjük, hogy az ítéleteken végzett egyváltozós logikai műveletet összesen 4, míg kétváltozósat összesen 16-félét értelmezhetünk (n változó esetén 2^{2^n} művelet). Ezek közül azonban elsősorban azokat érdemes kiemelni, amelyek analógiát mutatnak a halmazalgebrában látott műveletekkel, azaz a Boole-algebra műveleteit. Definiálásuk igazságtáblázat segítségével vagy szövegesen történhet. Az egyváltozós komplementer-képzés műveletének itt a *negáció* (NEM-művelet) felel meg.

Definíció

A <u>*negáció*</u> az a logikai művelet, ami az állítás logikai értékét az ellenkezőjére váltja. Jele: $\neg p$ ahol p jelöli az eredeti állítást.

A $\neg p$ logikai értéke tehát pontosan akkor igaz, ha p hamis (*2. ábra*).

A metszetképzés megfelelője a konjunkció (ÉS-művelet), míg az egyesítésé a diszjunkció (megengedő VAGY-művelet).

Definíció
A konjunkció az a két állítás között értelmezett logikai művelet, amelynek eredménye pontosan akkor igaz, ha mindkét állítás igaz. Jele: $p \wedge q$, ahol p és q jelöli a két állítást.

Definíció
A diszjunkció az a két állítás között értelmezett logikai művelet, amelynek eredménye pontosan akkor hamis, ha mindkét állítás hamis. Jele: $p \vee q$, ahol p és q jelöli a két állítást.
Igazságtáblázattal megadva:

p	$\neg p$
i	h
h	i

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

2. ábra

Az igazságtáblázatok segítségével könnyen megmutathatjuk, hogy ezen műveletek pontosan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a halmazalgebra megfelelő műveletei.

Példa
Bizonyítsuk be igazságtáblázat segítségével a két disztributív törvényt:
a) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
b) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Megoldás
Az igazságtáblázatban felépítjük, majd összehasonlítjuk a bal- és a jobb oldalon lévő kifejezéseket. Így például az a.) pontra a következő táblázat adódik.

p	q	r	$q \vee r$	*bal o.*	$p \wedge q$	$p \wedge r$	*jobb o.*
i	*i*	*i*	*i*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*i*	*h*	*i*	***i***	*i*	*h*	***i***
i	*h*	*i*	*i*	***i***	*h*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	*i*	***h***	*h*	*h*	***h***
i	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	***h***
h	*i*	*h*	*i*	***h***	*h*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*i*	***h***	*h*	*h*	***h***
h	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	***h***

3. ábra

Külön érdemes itt is kitérni a két de Morgan-azonosságra, amikkel kapcsolatban összevethetjük a köznyelvi kötőszavak és a matematikai logikában használt kifejezések jelentéstartalmát.

Példa

Tagadjuk kétféleképpen a következő kijelentést: *Ma szerda van és süt a nap.*

Megjegyzés

Még ilyen egyszerű példa esetén sem találja meg a legtöbb tanuló a kétféle tagadást és a de Morgan-azonosság alkalmazhatóságát.

($\neg(p \wedge q)$: *„Nem igaz, hogy ma szerda van és süt a nap”;*

$(\neg p) \vee (\neg q)$: *”Ma nem szerda van, vagy nem süt a nap.”)*

A műveleteknél sokszor akkor is érdemes kitenni a zárójelet, ha az elsőbbségi sorrend ezt nem indokolná – itt is, mint a halmazelméletben, a megértést könnyíti a zárójelhasználat. Érdemes ugyanakkor felhívni a diákok figyelmét a redundáns zárójelek nélküli alakra is!

Érdemes megemlíteni a „kizáró VAGY” (*antivalencia*) műveletét (gyakori jelölése $A \oplus B$) nemcsak a szimmetrikus differenciával való analógiája miatt, hanem azért is, hogy ezzel újabb kapcsolódási pontot mutassunk a nyelvi szerkezetek, továbbá az informatika tudománya felé. Klasszikus példamondatából: „Vagy sikerül a vizsgám,vagy kimaradok az egyetemről” azonnal látszik az igazságtáblája. Megemlíthetjük a „választó VAGY” (Sheffer-művelet, ‚jelölése A|B) műveletét is, melynek klasszikus példamondata „Vagy iszik az ember, vagy beszél”.

A logika – csakúgy, mint a halmazelmélet – elemei át- meg átszövik a középiskola négy évfolyamának matematika tananyagát. A 9. évfolyamon, amikor ezt az áttekintést végezzük, még nincs a diákoknak elég ismeretanyaguk ahhoz, hogy mélyebben eligazodjanak a logikai kvantorok, a „minden, bármely” ($\forall$) és a „létezik, van olyan” ($\exists$) világában. Ezek jelentéstartalmát, illetve a segítségükkel megfogalmazott állítások vizsgálatát, tagadását a későbbiekben, folyamatosan érdemes tisztázni, többek között az alábbi példák segítségével.

Példa

Tagadjuk kétféleképpen a következő állítást: *Minden trapéz paralelogramma*. Igaz-e ez a tagadás?

Megjegyzés

A formális, „*Nem igaz az, hogy minden trapéz paralelogramma*” tagadás az előzetes ismeretek birtokában könnyen megszületik. A másik lehetőség azonban sokkal kevésbé egyértelmű a diákok számára. Sokan úgy gondolják, hogy a „minden” tagadása az „egyik sem” – pedig ez utóbbinak logikai értelemben nincs köze az eredeti állításhoz. A tagadás helyesen „*Van olyan trapéz, ami nem paralelogramma.*” Ez utóbbi állítás természetesen hamis, hiszen könnyen mutatható olyan trapéz, aminek a szárai nem párhuzamosak. Az ilyen típusú feladatok arra is jók, hogy az egyéb matematikai területek fogalmait is folyamatosan a felszínen tartsuk.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né, & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi, E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

3.2. Az eseményalgebra bevezetése

A valószínűség-számítás, és azon belül az eseményalgebra tárgyalására többnyire a 11. évfolyamon szoktunk sort keríteni. E tárgyalás során mindenekelőtt tisztáznunk kell a *véletlen tömegjelenség* fogalmát, bár erre klasszikus matematikai egzaktságú definíciót nem tudunk adni. Elmagyarázzuk, hogy a *kísérlet* a véletlen tömegjelenség egyszeri megfigyelése, vagy előidézése. Mindezeket és a további fogalmak nagy részét is példákkal kell alátámasztanunk – akár úgy is, hogy a nagy klasszikushoz, a kockadobáshoz folyamodunk: minden diákkal hozatunk egy-egy szabályos dobókockát, és azzal szemléltetjük az általunk elmondottakat. Ez a gyakorlati megközelítés segíthet az *esemény, elemi esemény, eseménytér, lehetetlen esemény* és *biztos esemény* fogalmának kialakításában is.

Definíció

Az <u>esemény</u> egy véletlen tömegjelenséggel kapcsolatos kísérlet egyik lehetséges kimenetele.

Így szoktuk definiálni az eseményt, de ezzel a meghatározással azonnal gondjaink is adódhatnak, hiszen a lehetetlen eseményt is eseménynek tekintjük, pedig az éppen nem következik be a kísérlet során.

Definíció

Az <u>elemi esemény</u> olyan esemény, ami az adott kísérlet során csak egyféleképpen fordulhat elő.

Definíció

Az <u>eseménytér</u> egy adott véletlen tömegjelenségre vonatkozó elemi események összessége. Jele: H. (A szakirodalomban gyakran Ω szerepel, de talán célszerű itt is az egyszerűbb, illetve a halmazelméleti jelölésrendszerhez igazodó szimbólumot választani.)

Példa

Egy dobozban 4 piros, 3 fehér és 5 zöld golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból egymás után két golyót. Írjuk fel az eseményteret!

Megjegyzés

Azt, hogy a különböző színű golyók aktuális száma nem játszik szerepet az eseménytér felírásában, a tanulók általában nem látják, megzavarja őket a megoldás szempontjából felesleges adatsor. Az eseménytér:

$H = \{ff, fp, fz, pf, pp, pz, zf, zp, zz\}$.

Célszerű arra biztatni a diákokat, hogy az egyes elemi eseményeket valamilyen rendszerben, például lexikografikus sorrendben írják le, hogy biztosan ne hagyjanak ki egyet sem. Számos ilyen feladat fekete és fehér golyókkal dolgozik, de ezekben feleslegesen megnehezíti a leírást az azonos kezdőbetű.

Az eseménytér meghatározása után az eseményekre már elegendő e halmaz részhalmazaiként hivatkozni. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, itt is szükségünk van a tartalmazási reláció megfelelőjére.

Definíció

Legyen A és B egy eseménytér két eseménye. Azt mondjuk, hogy *A maga után vonja B-t*, ha A csak azokban az esetekben következik be, ha B is bekövetkezik. Jele $A \subseteq B$.

Definíció

A *lehetetlen esemény* olyan esemény, ami az adott véletlen tömegjelenség megfigyelése során nem következhet be. Jele: Ø vagy $\{\ \}$.

Definíció

A *biztos esemény* olyan esemény, ami az adott véletlen tömegjelenség megfigyelése során mindenképpen bekövetkezik. Jele: I. (A biztos eseményt egy-egy konkrét véletlen tömegjelenséggel kapcsolatban sokféleképpen megadhatjuk, talán emiatt alakult ki ez a jelölés. Bárhogyan is adjuk meg, a halmazelméleti analógiák következetes alkalmazása miatt itt tulajdonképpen a H eseménytérről – alaphalmazról – van szó.)

Jól kell látnunk – és láttatnunk – tehát az analógiát a halmaz- és a Boole-algebrával. Miután az eseményalgebra megadásakor már jócskán túl vagyunk az előző két algebrához tartozó ismeretek átadásán, könnyen hivatkozhatunk a tanulók akkor megszerzett tudására. A műveletek elnevezése, megfogalmazása azonban más, és a jelölésük is – bár ez utóbbi nem egyértelmű: a tankönyvek, példatárak egy része a halmazelméleti jelöléseket veszi át ($\cap, \cup$), másik részük a számok között használatos műveleti jelek mellett teszi le a voksot ($\cdot, +$).

Mi ez utóbbi megoldást választjuk, de mindenki a saját tanítási gyakorlatában következetesen kell, hogy használja az általa előnyben részesített változatot – a diákok figyelmét azonban mindenképpen érdemes felhívni erre a jelölésbeli kettősségre.

Definíció

Legyen adott a H eseménytér, és legyen $A \subseteq H$ tetszőleges esemény. Ekkor az A esemény <u>ellentett eseménye</u> az a H-beli esemény, ami akkor következik be, ha A nem. Jele: $\overline{A}$.

Definíció

Legyen adott a H eseménytér, és legyenek $A, B \subseteq H$ tetszőleges események. Ekkor az A és a B események <u>összege</u> ($A + B$) az az esemény, ami akkor következik be, ha A vagy B teljesül.

Definíció

Legyen adott a H eseménytér, és legyenek $A, B \subseteq H$ tetszőleges események. Ekkor az A és a B események <u>szorzata</u> ($A \cdot B$) az az esemény, ami akkor következik be, ha A és B is teljesül.

A definíciók mellett mindenképpen ki kell térnünk a legfontosabb tulajdonságokra, mindenekelőtt a kommutativitásra, az asszociativitásra és a két disztributív törvény teljesülésére, továbbá a nagyon jól használható de Morgan-azonosságokra. Ki kell térnünk a különbség definiálására is, amit persze megtehetünk az eddigi műveletek segítségével is

($A \setminus B = A \cdot \overline{B}$),

továbbá az *egymást kizáró események* fogalmára, ami a halmazelmélet „diszjunkt halmazok" fogalmával analóg ($A \cdot B = \emptyset$).

A műveletek rögzítését, begyakorlását példákkal érdemes segítenünk.

Példa

Egy diák vonattal Budapestre utazik. Legyen A az az esemény, hogy az út során zenét hallgat, B az, hogy internetezik, C pedig az, hogy olvas. Írjuk le szövegesen, mit jelentenek az alábbi események:

(1) $A + B + C$ (2) $A \cdot B \cdot \overline{C}$ (3) $\overline{A + B}$ (4) $\overline{A} + \overline{B} + A\overline{C}$

Megjegyzés

Az (1) megfogalmazása egyszerű: *„A diák vagy zenét hallgat, vagy internetezik, vagy olvas."* Itt arra érdemes felhívni a figyelmet, hogy a vagy ebben az esetben természetesen megengedő értelmű. A (2)-t sem nehéz megadni: *„A diák zenét hallgat és internetezik, de nem olvas."* Itt a *„de"* kötőszó használata érdemel figyelmet és magyarázatot. A (3) pont megválaszolása már nagyobb körültekintést igényel: a kissé nehézkes *„Nem igaz az, hogy a diák zenét hallgat vagy internetezik."* elfogadása mellett hívjuk fel a figyelmet a de Morgan-azonosság alkalmazásával érvényesíthető *„A diák nem hallgat zenét és nem is internetezik.”* alakra! A (4) válasz megadása az előzmények ismeretében nem nehéz: *„A diák vagy nem hallgat zenét, vagy nem internetezik, vagy zenét hallgat, de nem olvas.”*

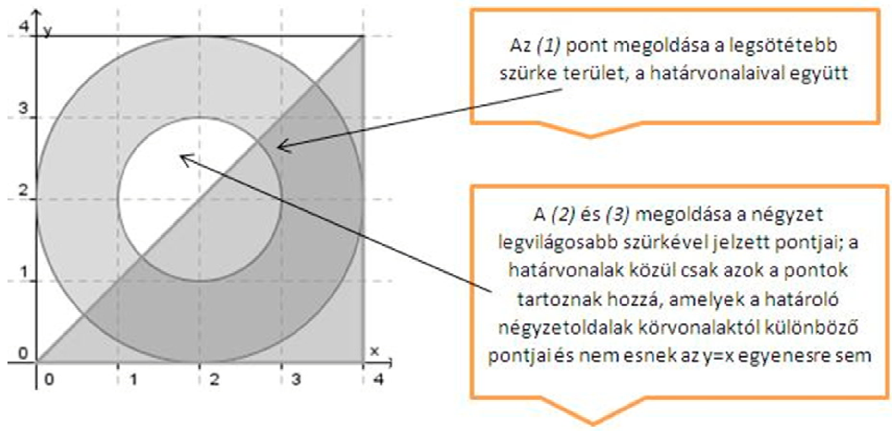
Példa

Legyen az eseménytér a koordináta-rendszer azon pontjainak halmaza, amelyek x, y koordinátáira $0 \le x, y \le 4$ teljesül. Véletlenszerűen jelöljük meg e ponthalmaz egyik pontját! Legyen az A esemény az, hogy e pont koordinátáira teljesül az $1 \le (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 4$ összefüggés, a B esemény pedig az, hogy a koordinátákra igaz az $x - y \ge 0$ egyenlőtlenség! Ábrázoljuk a következő műveleteknek megfelelő ponthalmazokat:

(1) $A \cdot B$ (2) $\overline{A+B}$ (3) $\overline{B} \setminus \mathrm{A}$

Megjegyzés

Az A és a B eseményeknek megfelelő ponthalmazok közös koordinátarendszerben történő ábrázolása után (GeoGebrában vagy interaktív táblán is akár) a megfelelő területek jelölhetők – vigyáznunk kell azonban a határvonalak jelölésére! Fel kell ismernünk – és érdemes azonos átalakításokkal igazolni is – hogy a (2) és a (3) pontnak megfelelő ponthalmaz azonos (*4. ábra*)!



4. ábra

Ezt a példát természetesen akkor célszerű kitűzni, ha a koordinátageometria fejezet tárgyalása után foglalkozunk az eseményalgebrával. Ott azonban nagyon hasznos lehet: egyrészt visszautal a korábban megtanult ismeretekre, másrészt előkészíti a geometriai valószínűség feldolgozását. Külön érdemes odafigyelni az egyes alpontok megoldása során a határvonalak pontjaira, azok tudatos ábrázoltatására.

A fentiek mellett a szokásos kockadobás, pénzfeldobás, kártyahúzás feladataiból is érdemes válogatnunk a gyakorlás során.

A valószínűség fogalmának bevezetése után, a klasszikus valószínűségi mezőn érvényes feladatok között is érdemes kitűznünk olyanokat, amelyek során az eseményalgebra műveleteit használtathatjuk!

Példa

Helyezzük el egy dobozban a 0, 2, 3, 5, 5, 6 számokat tartalmazó kártyákat, majd egyesével kivéve a dobozból, rakjuk őket egymás mellé! Legyen A az az esemény, hogy így 4-gyel osztható hatjegyű számot kapunk, B pedig az, hogy az így kapott szám 5-tel osztható. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

$A+B,\ A\cdot B,\ \overline{A}+\overline{B}$!

Megjegyzés

Amellett, hogy ezzel a példával gyakorolhatjuk az eseményalgebra műveleteit és azonosságait, valamint a valószínűségre vonatkozó tulajdonságokat, ismét ráirányíthatjuk a figyelmet az esetszétválasztás fontosságára, hiszen másképpen kell számolnunk azokban az esetekben, amikor a szám 0-ra végződik (az 5-tel oszthatóság esetén) vagy az utolsó két pozíció valamelyikén 0 áll (ha a 4-gyel oszthatóság eseteit akarjuk számba venni), és másképpen, ha ezek nem teljesülnek. Fontos felismertetni a feladatmegoldás célszerű lépéseit is: a $P(A)$ és a $P(B)$ kiszámítása után érdemes a $P(A\cdot B)$-vel foglalkozni, hiszen a $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$ és az $A+B=A\cdot B$ azonosság segítségével a másik két kérdés könnyen megválaszolható.

Ezen megfontolások alapján tehát először kiszámoljuk az összes esetet: ismétléses permutációval ez

$$\frac{6!}{2!}=360\,.$$

A 4-gyel osztható számok végződései alapján három csoportot különíthetünk el:

– az elsőbe a 20 és a 60 végű számok tartoznak, ilyenből összesen $2 \cdot \frac{4!}{2!} = 24$ van;

– a másodikba a 32 és a 36 végűek, ezek száma összesen $2 \cdot \left(\frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} \right) = 18$;

– a harmadikba az 52-re és az 56-ra végződőek, amelyekből $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$ van.

A B esemény egyszerűbben kezelhető:

– a 0-ra végződő esetek száma $\frac{5!}{2!} = 60$,

– az 5-re végződőeké pedig $4 \cdot 4! = 96$.

Így $P(A) = \frac{78}{360} = \frac{13}{60}$, $P(B) = \frac{156}{360} = \frac{26}{60}$.

Az $A \cdot B$ a 20 és 60 végű számokat jelenti, tehát $P(A \cdot B) = \frac{24}{360} = \frac{4}{60}$.

Ebből $P(A + B) = \frac{13}{60} + \frac{26}{60} - \frac{4}{60} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$, $P(\overline{A} + \overline{B}) = P(\overline{A \cdot B}) = 1 - \frac{4}{60} = \frac{56}{60} = \frac{14}{15}$

A fenti példa egyébként határeset: a kerettanterv inkább csak emelt szinten várja el, hogy a diákok ennyire otthon legyenek az eseményalgebrában. De eddig is láthattuk: ugyanazt a feladatot többféleképpen megfogalmazva, vagy a megoldást többféle úton elképzelve e képzeletbeli határvonalnak hol egyik, hol másik oldalán sétálunk.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó,Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr.Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi,E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

4. *Emelt szintű ismeretek előkészítése a középszintű tananyag keretein belül*

BALLA Éva

4.1. Emelt szintű ismeretek előkészítése az algebra témakörben

4.1.1. Oszthatóság, számrendszerek

A téma emelt szintű vizsgakövetelményei: Az emelt szinten érettségiző diáknak legyen jártassága az összetettebb algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is. Ismerje a témakörhöz tartozó tételek bizonyítását. Tudjon oszthatósági feladatokat megoldani; tudja a számokat 10-es alapú számrendszerből átírni n alapúba és viszont.

Az alábbi oszthatósági feladatok megoldása nem kíván az alapórán elsajátíthatónál több ismeretet, de közös megbeszélésük, a megoldásukhoz használt módszerek bemutatása rávilágít bizonyos összefüggésekre, ezáltal az eddig tanultak mélyebb megértését segíti.

Példa

Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha

a.) $45\,|\,\overline{135x2y}$ b.) $24\,|\,\overline{75x24y}$?

Megjegyzés

A tanult *oszthatósági szabályok* segítségével újakat alkothatunk. (Gondoljunk a 6-tal való oszthatóságra!) Felhasználjuk a következő tételt:

ha $a|c \wedge b|c \wedge (a;b)=1 \Rightarrow a \cdot b|c$.

Célszerű a számelmélet alaptételének megbeszélése után olyan feladatokat is kitűzni, amelyekben az osztók számával, négyzetszámokkal kapcsolatos ismeretek, helyiértékes alakkal való számolás is előkerülnek.

Példa

Hány osztója van a 200-nak?

Megoldás

$200 = 2^3 \cdot 5^2$, osztói $2^x \cdot 5^y$ alakúak, ahol $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ $y \in \{0; 1; 2\}$, tehát a 200-nak (3 + 1) · (2 + 1) = 12 osztója van. Eredményünket általánosítva kapjuk az *osztók számára* vonatkozó tételt.

Feladat

Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben! Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám! (Emelt szintű érettségi 2006. február.)

Megjegyzés

A *négyzetszámokkal* kapcsolatosan megbeszélhetjük a következőket: a négyzetszámok prímtényezős felbontásában szereplő kitevők mindegyike páros. Ha egy négyzetszám osztható egy p prímmel, akkor osztható annak négyzetével is. Az n^2 és $(n+1)^2$ között nincs négyzetszám, ha n természetes szám. Érdemes vizsgálni négyzetszámok 3-mal, 4-gyel való osztási maradékait, illetve négyzetszámok, hatványok végződéseit.

Feladat

A tízes számrendszerben felírt egyjegyű a, kétjegyű ab és háromjegyű bba szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Számítsa ki a sorozat differenciáját és az első száz elem összegét! (Emelt szintű érettségi 2006. május.)

Megjegyzés

A *helyiértékes alakkal* megoldható oszthatósági feladatok a számrendszerekkel való ismerkedést is előkészítik 9. évfolyamon.

Mutassunk olyan oszthatósági feladatokat is, amelyek megoldásában a *nevezetes szorzatokat* is használhatjuk.

Példa

Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor $n^3 - n$ osztható 6-tal!

Megoldás

Többféle megoldási módszer közül választhatunk.

1) A kifejezést szorzattá alakítjuk:

$$n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = (n-1)n(n+1),$$

ez három egymást követő egész szám. Közöttük biztosan van egy 2-vel és egy 3-mal osztható szám, tehát szorzatuk osztható 6-tal.

2) Sorban megvizsgálva az n szám 6-tal (vagy 2-vel és 3-mal) való különböző osztási maradékai esetén milyen maradékot ad az $n^3 - n$ kifejezés. Rövidebb a megoldás, ha előbb belátjuk, hogy egy szám hatványai helyett elegendő a maradékok hatványaival számolni.
3) Teljes indukcióval. A *teljes indukciós bizonyítási* módszert magasabb évfolyamon tanítjuk, önálló alkalmazását nem várjuk el átlagos képességű csoportokban, a középszintű érettségi követelményei között nem szerepel.

Az emelt szintű érettségi feladatok között előkerülnek egyszerűbb *diofantoszi egyenletre* vezető problémák is, ezért érdemes néhány ilyen feladatot is megbeszélni.

Feladat

Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestettük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockákra vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros. Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata? (Emelt szintű érettségi 2011. május.)

4.1.2. Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek

A téma emelt szintű vizsgakövetelményei: A vizsgázó ismerje az egyenletek értelmezési tartomány-, értékkészlet vizsgálattal, szorzattá alakítással való megoldási módszereit. Tudjon abszolútértékes, elsőfokú paraméteres egyenleteket, másodfokú paraméteres feladatokat megoldani, alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket, tudjon két- és háromismeretlenes elsőfokú egyenletrendszereket, másodfokúra viszszavezethető egyenletrendszereket, két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani. Tudjon egyszerű négyzetgyökös, abszolútértékes, exponenciális, logaritmikus, trigonometrikus egyenlőtlenségeket, összetettebb logaritmikus, exponenciális és trigonometrikus egyenleteket, egyenletrendszereket megoldani.

Az érettségin gyakran tűznek ki *szöveges feladatot*, ezért már az elsőfokú egyenletek témakörben érdemes minél több ilyen feladatot megoldani. A szöveges feladatok megoldása kompetencia jellegű tudást jelent, hiszen a tanult eljárásokat ismeretlen szituációban kell alkalmazni. A tanulóknak a legnagyobb nehézséget általában a megfelelő matematikai modell megadása jelenti, vagyis a szöveg alapján a megfelelő egyenlet felírása. A szöveges feladatok tanításának fontossága indokolja, hogy minden adódó alkalommal oldassunk meg a tanulókkal szöveges feladatokat is, legyen szó akár első- vagy másodfokú, akár exponenciális, logaritmikus egyenletekről vagy sorozatokról. A szöveges feladatok változatossága végtelen, de fogódzókat adhatunk bizonyos típusfeladatok megoldásának bemutatásával. A kétszintű érettségi bevezetésével úgy tűnik, hogy a régi típusfeladatok leginkább emelt szinten fordulnak elő, de középszinten is kitűznek egyenletrendszerre vezető szöveges feladatokat. Gyakran szerepel a szöveges feladatokban százalékszámítás, amelynek alapos ismerete hozzájárulhat a sorozatok témakörben tanított kamatos kamatszámítási feladatok sikeres megoldásához.

Feladatok

(1) A „Tojás” farmon 10000 tyúkot tartanak, ezek egy év alatt 2,20 millió tojást tojnak. Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának p%-kal történő csökkentése 2p%-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes. Hány százalékkal csökkentették a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt? (emelt szintű érettségi 2006. február)

(2) Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerelésben árulják. a.) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon levő összes ecetet összeöntenénk? Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki. b.) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra.) Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150Ft, a 20%-os 156 Ft. c.) Ha ezeket az árakat a b.) részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát? (Emelt szintű érettségi 2009. október.)

Megjegyzés

Ez utóbbi feladat c.) részében egy elsőfokú *háromismeretlenes egyenletrendszert* kell felírni, majd eldönteni, van-e egyértelmű megoldása. Egy ilyen feladatot csak akkor tudnak megoldani a diákjaink, ha korábban már foglalkoztak többismeretlenes egyenletrendszerrel, és találkoztak olyan egyenletrendszerekkel, amelyek *ellentmondásra* vagy *azonosságra* vezetnek.

Az elsőfokú, majd különösen a másodfokú egyenletek témakörben mutatnunk kell példákat *paraméteres egyenletek* megoldására. A paraméteres egyenletek megoldásának ismerete emelt szintű követelmény, de a másodfokú egyenletek tárgyalásánál gyakran előkerülnek olyan feladatok, amelyben paraméterek szerepelnek, illetve bizonyos alkalmazásokban (kémiai, fizikai, pénzügyi feladatokban) is előfordulnak.

A paraméteres feladatok egyik típusa az, amelyben az egyenlet megoldása a feladat. Másik típusa ezeknek a feladatoknak, amelyekben meghatározott feltételeknek megfelelő paramétert keresünk.

Feladat

Oldja meg az

$$\frac{x}{x^2-4}+\frac{p}{x^2+2x}+\frac{1}{2x-x^2}=0$$

egyenletet, ahol a p paraméter valós számot jelöl! Van-e olyan p valós szám, amely esetén két különböző gyöke van az egyenletnek? Van-e olyan p valós szám, amely esetén nincs gyöke az egyenletnek? (Emelt szintű érettségi 2007. május.)

Megjegyzés

A megoldásokat a paraméter(ek) összes megengedett értékére meg kell adnunk. Ha a feladatban az ismeretlenre valamilyen feltételt kell szabni (pl. nevezőben szerepel), akkor a kapott eredményt is meg kell vizsgálni, hogy mely paraméter értékek esetén teljesül a feltétel.

A másodfokú egyenletek tanításakor foglalkozunk a *diszkriminâns* vizsgálattal kapcsolatos problémákkal, illetve a *Viète-formulákkal* megoldható példákkal.

Feladatok

(1) Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x^2-4(\sin\alpha+\cos\alpha)x+1+\sin\alpha=0$ egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke legyen! (Emelt szintű érettségi 2008. május.)

(2) Számítsa ki a p valós paraméter értékét, ha az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet valós gyökei 1-gyel kisebbek, mint az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei! (Emelt szintű érettségi 2006. május.)

Az egyenletekkel kapcsolatos ismeretek között középszinten is foglakozunk néhány gyakrabban előforduló, speciális alakú egyenletek esetében alkalmazható módszerrel. Az *új ismeretlen* bevezetésének módszerét először a másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek megoldásánál szoktuk megmutatni, de megkönnyítheti pl. négyzetgyökös, exponenciális, logaritmikus vagy trigonometrikus egyenletek megoldását is.

Feladat

Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$6 \cdot \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = \left(x^2\right)^{\log_3 x} - 6075$$

(Emelt szintű érettségi 2012. május.)

Összetettebb feladatok megoldásához szükség van bizonyos eljárások, típusfeladatok, módszerek ismeretére, de ez nem elegendő, a tanultakat rendszerben kell látni, sokféle területről felszedett tudáselemet kell összekapcsolni.

Feladatok

(1) Igazolja, hogy az alábbi egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán!

$$\sin x - 1 = \sqrt{\lg\left(\cos^2 x - 1{,}5\cos x\right)}$$

(Emelt szintű érettségi 2009. május.)

(2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4\sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x + 7\sin x + 12{,}25}$$

(Emelt szintű érettségi 2005. május.)

Megjegyzés

A fenti egyenletek megoldásához felhasználandó ismeretek: *négyzetgyök, szögfüggvény* és *logaritmus* fogalma, *nevezetes szorzat*, trigonometrikus függvény és logaritmusfüggvény tulajdonságai (értékkészlet, menet), trigonometrikus egyenlet megoldása.

Az egyenletekről, egyenletrendszerekről tanultakat a koordinátageometriában is alkalmazni kell. Emelt szinten meg kell tudni határozni két kör közös pontjait is, amihez elengedhetetlen, hogy másodfokú egyenletekből álló egyenletrendszert meg tudjon oldani a vizsgázó.

Példa

Jelölje *e* azokat az egyeneseket, amelyeknek egyenlete 2x + y = b, ahol *b* valós paraméter. Mekkora lehet *b* értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott *e* egyenesnek és az origó középpontú, 4 egység sugarú körnek? (Emelt szintű érettségi 2009. május.)

Megjegyzés

A feladat megoldható a szerkesztési eljárást követve egy első- és egy másodfokú egyenletből álló egyenletrendszer megoldásával, vagy algebrai megfontolásokat felhasználva vizsgálhatjuk, hogy a

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=b \\ x^2+y^2&=16 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek milyen *b*-re van megoldása (diszkriminláns vizsgálat).

Emelt szinten tudni kell első- illetve másodfokú, egyszerűbb négyzetgyökös, exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlőtlenségeket megoldani. Az egyenlőtlenségek megoldásánál általában a megfelelő függvények tulajdonságait használjuk fel, az algebrai megoldás mellett a *grafikus megoldási módszert* alkalmazzuk.

Feladatok

(1) Jelölje H a [0; 2π [intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$. Adja meg az A, a B és az A \ B halmazt! (emelt szintű érettségi 2008. október)

(2) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
$\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \log_{0,1}(x+2) < 0$ (emelt szintű érettségi 2009. május)

(3) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
$0{,}5x + \sqrt{x+3} \le 2{,}5$ (emelt szintű érettségi 2010. október)

Megjegyzés

A fenti feladatok megoldásához szükséges az exponenciális és a logaritmusfüggvények tulajdonságainak ismerete, másodfokú és trigonometrikus függvények használata, értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálat. Az utolsó példa megoldásához az algebrai út helyett lényegesen egyszerűbb a grafikus módszert választani.

Az emelt szintű vizsgakövetelményekben felsorolt megoldási módszerek, feladattípusok bemutatására a megfelelő témán belül érdemes – legalább egy-egy példa erejéig – időt szakítani. Bizonyos módszerek különböző tartalmaknál többször előjönnek, így ezeket a diákjaink könnyebben elsajátíthatják, míg másokat csak a fakultációs csoportokban van lehetőség részletesebben tárgyalni és elmélyíteni.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Hortobágyi I., Marosvári P., Pálmay L., Pósfai P., Siposs A. & Vancsó Ö. (2003): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Feladatsorok az emelt szintű írásbeli érettségi vizsgákon: http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (2015.02.25.)

4.2. Emelt szintű ismeretek előkészítése a geometria témakörben

A geometria témakörben sok olyan téma van, amely a kétszintű érettségi bevezetése óta kisebb hangsúlyt kap, mert nem tartozik a középszintű érettségi követelményei közé. Ezeket a fogalmakat, tételeket továbbra is tanítjuk, de gyakorlásukra, a tételek bizonyítására, alkalmazásukra kevesebb időt fordítunk, ugyanakkor az emelt szintű követelményeknek továbbra is részei. Ezek közé tartoznak az elemi geometriában a húr- és érintőnégyszögek, a kerületi és középponti szögek ismerete és alkalmazása; a trigonometriában az addíciós összefüggések alkalmazása, egymásból szögfüggvények kifejezése; a koordinátageometriában két kör kölcsönös helyzete, külső pontból húzott érintő egyenlete, parabola egyenletének ismerete, alkalmazása.

Általában a 10. évfolyamon tanítjuk a *húrnégyszögek és érintőnégyszögek* fogalmát és a hozzájuk kapcsolódó tételeket. Az alábbiakhoz hasonló feladatokat ezek ismeretében egy átlagos képességű csoportban is megbeszélhetünk, az első két példánál egyúttal azt is kiemelve, hogy több esetet is vizsgálni kell.

Feladatok

(1) Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya 7 : 6 : 8. Mekkorák a húrnégyszög szögei? (Emelt szintű érettségi 2006. október.)

(2) Egy érintőnégyszög három oldalának hossza 5 cm, 8 cm és 11 cm. Mekkora lehet a hiányzó oldal hossza?

Példa

Egy tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 5 illetve 20 egység. Számítsa ki a trapéz területét és átlójának hosszát! Bizonyítsa be: ha egy húrtrapéz érintőnégyszög, akkor magasságának hossza az alapok hosszának mértani közepe! (emelt szintű érettségi 2008. május)

Megjegyzés

Az utóbbi példában a húrtrapéz fogalma, az érintőnégyszögek tétele mellett a Pitagorasz-tételt és a mértani közép fogalmát is használni kell a megoldáshoz.

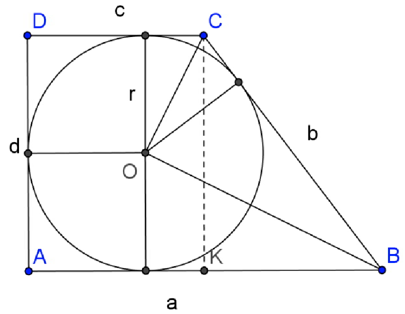
Példa

Az *ABCD* derékszögű érintőtrapéz *AB* és *CD* alapjai (*AB* > *CD*) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges *BC* szárral vett érintési pontja negyedeli a BC szárat. Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát! (Emelt szintű érettségi 2005. október.)

Megoldás

A feladat megoldásához szükséges előzetes ismeretek: érintőnégyszögek tétele, Pitagorasz-tétel, *beírt kör középpontjával*, trapézzal kapcsolatos ismeretek, *magasságtétel*.

1) Az érintőnégyszögek tétele alapján felírható az (1) és (2) egyenlet. A C csúcsból meghúzva a magasságot, a kapott derékszögű háromszögre (*1. ábrán BCK*) alkalmazhatjuk a Pitagorasz-tételt (3). A beírt kör középpontját a szögfelezők metszéspontja adja, ezért BO és CO szakaszok szögfelezők. A trapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°, így a BOC háromszög B-nél és C-nél levő szögeinek összege 90°, tehát O-nál derékszög van. A háromszögre alkalmazható a magasságtétel (4).



(1) $a + c = 20$

(2) $b + d = 20$

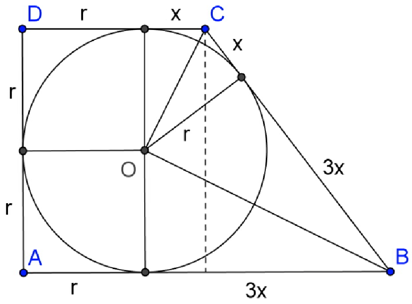
(3) $(a - c)^2 + d^2 = b^2$

(4) $\frac{b}{4} \cdot \frac{3b}{4} = r^2$

(5) $d = 2r$

1. ábra

2) Felhasználhatjuk a külső pontból *a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét* is. Ekkor a *2. ábra* jelöléseit használva csak két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert kell megoldani. A (2) egyenletet a CKB háromszögre felírt Pitagorasz-tételből is megkaphatjuk.



$$(1)\quad 2r+4x=20$$

$$(2)\quad 3x^2=r^2$$

2. ábra

A húr- és érintőnégyszögekről tanultakat a koordinátageometriában is elővehetjük.

Feladat

Az *ABCD* konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

DA: $3x-4y-20=0$, AB: $3x+5y-20=0$, BC: $4x-3y+12=0$, CD: $5x+3y+15=0$.

Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög húrnégyszög! (Emelt szintű érettségi 2011. május.)

A terület, térfogat fogalmának kialakítása során sokszor használjuk a háromszögek területének különböző kiszámítási módjait. A súlyvonallal kapcsolatban is megbeszéljük, hogy az miért felezi a *háromszög területét*. Tanulóink többsége számára mégis nehéznek tűnik a közös oldalegyenessel és ezzel szemközti közös csúccsal rendelkező háromszögek területei közötti összefüggés felismerése. Ezt az összefüggést és a *hasonlóságot* kell felhasználni a következő két feladat megoldásában.

Feladat

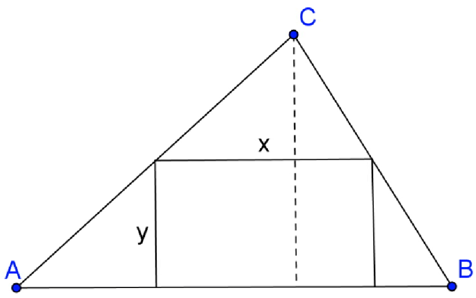
Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD*, és *AB* > *CD*. A trapézátlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét. Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek? (Emelt szintű érettségi 2006. február.)

Példa

Az *ABC* háromszög oldalai *AB = 42*, *BC = 40* és *CA = 26*. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög *AB* oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög *CA* illetve *BC* oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai? (emelt szintű érettségi 2005. május)

Megoldás

A feladat megoldásához szükséges előzetes ismeretek: *Heron-képlet, hasonlóság alkalmazása, szélsőérték-feladat megoldása, másodfokú függvény tulajdonságainak ismerete* (grafikon, teljes négyzetté kiegészítés módszere, differenciálszámítás) vagy *nevezetes közepek*. A háromszög oldalainak ismeretében meghatározható a területe, melyből kiszámítható az m_c magassága. Hasonlóság alkalmazásával a téglalap két ismeretlen oldala közötti kapcsolatot írhatunk fel, így a téglalp területét egyváltozós függvényként adhatjuk meg. A feladat innen egy másodfokú függvény szélsőértékének vizsgálata.



$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} \Rightarrow m_c = 24$$

$$\frac{24-y}{24} = \frac{x}{42} \Rightarrow x = \frac{7}{4}(24-y)$$

$$t = xy = \frac{7}{4}\left(24y - y^2\right)$$

3. ábra

Feladat

Egy forgáskúp alapkörének átmérője 10 cm, alkotója 13 cm. Írjon ebbe egy olyan, a kúppal közös szimmetriatengelyű forgáshengert, amelynek alaplapja a kúp alaplapjára illeszkedik, és térfogata maximális! Mekkora ennek a hengernek a sugara? (Emelt szintű érettségi 2009. május.)

Megjegyzés

A megfelelő síkmetszet megtalálása után az előbbi példához analóg módon oldható meg, de a szélsőérték-probléma itt egy harmadfokú függvény vizsgálatához vezet.

Szintén egy geometriai szélsőérték-probléma az alábbi feladat is, melyet koordinátageometriai módszerekkel vagy elemi geometriai úton, a hasonlóság felhasználásával lehet megoldani.

Feladat

Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2; 6) pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

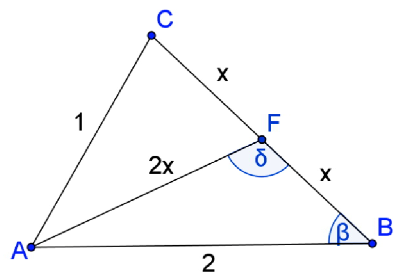
A trigonometria fejezetben lehetőség van átismételni az elemi geometriából korábban tanultakat. A *középponti és kerületi szögek tételé*t is átismételhetjük, a szinusztétel kapcsán bizonyíthatjuk a húr hossza és a hozzá tartozó kerületi szög közötti $a = 2r\sin\alpha$ összefüggést. A következő feladat megoldásához a *szinusz- és koszinusztétel* mellett ezekre az ismeretekre is szükség van.

Feladat

Az ABC háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\angle = 60°$. a. Számítsa ki a BC oldal hosszát! Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az AC oldal b cm, az AB oldal pedig $3b$ cm hosszúságú? (Emelt szintű érettségi 2007. október.)

Példa

Az ABC háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával. a.) Mekkora a BC oldal hossza? b.) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg! (Emelt szintű érettségi 2008. október.)



4. ábra

Megoldás

1) Trigonometriai úton: (1) Felírunk egy-egy koszinusztételt az *ABF* és az *ABC* háromszögre, a kapott egyenletrendszerből β és x meghatározható. A terület pontos értékének kiszámításához a
$$T = \frac{ab\sin\beta}{2}$$
képletet használhatjuk, ehhez <u>*szögfüggvényértékeket kell kifejezni egymásból*</u>: a $cos\beta$ értékéből kell kifejezni $sin\beta$ pontos értékét. (2) Felírunk egy-egy koszinusztételt az *ABF* és az *AFC* háromszögre, felhasználjuk $cos\,(180°- \delta)= -cos\delta$ összefüggést, és a kapott egyenletrendszerből δ és x meghatározható. Minthogy a <u>*súlyvonal*</u> felezi a háromszög területét, elegendő pl. az *ABF* háromszög területét megadni, a δ szög segítségével, az (1) esetnél leírt módon.
2) Megoldás elemi geometriai úton: A háromszöget az *F* felezőpontra tükrözve egy paralelogrammát kapunk, melynek átlói *2x* és *4x* hosszúságúak. Felhasználjuk azt a tételt, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, ebből megkapjuk a *BC* oldalt. A területszámításhoz a Herón-képletet használhatjuk.

Az összetettebb geometriai problémáknál az ábra elkészítése sem könnyű feladat. A trigonometriai feladatokban gyakran előfordul, hogy valamilyen valós életből vett szituációból kiindulva távolságokat, szögeket kell meghatározni. Az ilyen feladatokban problémát szokott okozni a megfelelő matematikai modell elkészítése, különösen akkor, ha valamilyen térgeometriai ábrát kell felvázolni, ezért célszerű több ilyen feladatot megbeszélni.

Feladat

A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket. a.) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg. b.) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (Emelt szintű érettségi 2012. október.)

Megjegyzés

A példa a.) része trigonometrikus úton is megoldható, de a feladat akár egy alkalmas koordinátarendszerbe is áttehető. Célszerű néhány hasonló problémát megmutatni, ezzel is rávilágítva a geometria egyes területei közötti kapcsolatra, és a koordinátageometriai módszer használhatóságára.

Emelt szinten az addíciós tételeket, összetettebb trigonometrikus egyenletek megoldási módszereit is ismerni kell a diákoknak, ezek alkalmazására is mutatunk néhány példát.

Feladat

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ (Emelt szintű érettségi 2006. február.)

Példa

Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes a

$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma)$

összefüggés, akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű! (Emelt szintű érettségi 2006. október.)

Megoldás

1) A feladat megoldásához szükséges előzetes ismeretek: *<u>háromszög szögei és oldalai közötti összefüggések, szögfüggvények értelmezése, addíciós tételek, trigonometrikus egyenletek megoldása.</u>*

Felhasználva, hogy

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos(180°-\beta)=-\cos\beta$, illetve

$\cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha$,

a feltétel szerint $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{-\cos\beta}{-\cos\alpha}$,

amiből a $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ egyenlethez jutunk.

Ebből $\alpha=\beta$ és $\alpha=90°-\beta$ adódik,

amelyből következik az állítás.

2) A feladat megoldásához szükséges előzetes ismeretek: *<u>szögfüggvények értelmezése, szinusztétel, koszinusztétel, nevezetes szorzatok.</u>*

A $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{-\cos\beta}{-\cos\alpha}$ egyenletet alakítsuk át úgy, hogy szögek helyett az oldalak szerepeljenek.

A szinusz- és a koszinusztételből: .

A kapott egyenletet átrendezve:

$c^2\left(a^2-b^2\right)=a^4-b^4$, $2bc$

amiből szorzattá alakítás után a következőt kapjuk:

$0=\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)$. Ebből következik az állítás.

Végezetül nézzünk meg egy <u>*parabolával*</u> kapcsolatos feladatot! A parabolával, mint nevezetes ponthalmazzal már 9. évfolyamon, a másodfokú függvény grafikonjával 10. évfolyamon találkoznak diákjaink, így az y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenletével is foglalkozunk már akkor. A deriválás ismeretében pedig felírhatjuk adott pontbeli érintőjének egyenletét.

Feladat

Adott a valós számok halmazán értelmezett

$x\ \alpha\ \ 2x^2-4x-6$ függvény.

a) Számítsa ki a függvény zérushelyeit és számítással határozza meg a függvény minimumának helyét és értékét!

b) Ábrázolja a függvényt a [−2;4] intervallumon!

c) Határozza meg az $y = 2x^2 - 4x - 6$ egyenletű parabola fókuszpontjának koordinátáit! (Emelt szintű érettségi 2009. május.)

Felhasznált és ajánlott irodalom

Hortobágyi I., Marosvári P., Pálmay L., Pósfai P., Siposs A. & Vancsó Ö. (2003): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi,E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Feladatsorok az emelt szintű írásbeli érettségi vizsgákon: http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (2015.02.25.)

4.3. Kapcsolódási pontok a kombinatorikai, a statisztikai és a valószínűségszámítási feladatokban

A statisztika témakör bevezetésekor beszélünk a statisztikai adatok gyűjtéséről, rendszerezéséről, különböző ábrázolásairól. Példákat mutatunk az adathalmazok különböző szemléltetési módjaira. Elvárjuk a diákoktól, hogy tudjanak adathalmazt táblázatba rendezni, táblázattal megadott adatokat feldolgozni, tudjanak kördiagramot, oszlopdiagramot, szalag-, vonaldiagramot készíteni, adott diagramról információt kiolvasni. Ismerniük és használniuk kell a gyakorisági diagram, gyakoriság, relatív gyakoriság fogalmát, érteni a véletlenszerű mintavétel fogalmát. Tanítjuk a statisztikai jellemzőket: középértékeket és szóródási mutatókat. Az aritmetikai átlag, a módusz, a medián, a terjedelem, az átlagos abszolút eltérés, a szórás ismerete és kiszámítása már középszinten is követelmény. A középszintű feladatsorokban leginkább az adathalmazok ábrázolását, azokról információk leolvasását és a középértékek alkalmazását kérik számon. Emelt szintű érettségi sorokban tipikus feladatnak tekinthetők azok, amelyekben egyszerűbb táblázatok hiányzó értékeit kell kiszámolni, diagramokról adatokat meghatározni vagy összetettebb táblázatot értelmezni.

Míg középszinten elegendő, ha a vizsgázó a felsorolt adatokból ki tudja számolni a statisztikai mutatókat, emelt szinten fontos, hogy tisztában legyen a fogalom értelmezésével.

Feladat

Egy önkormányzatnál 220 dolgozó bruttó bére augusztus hónapban az alábbi táblázat szerint alakult:

bér (ezer forintban)	68	108	154	184	225
dolgozók száma	25	65	70	44	16

1. táblázat

Mennyi az augusztusi bruttó bérek átlaga és szórása? Szeptemberben minden dolgozó bruttó bére 2500 Ft-tal nő. Hogyan változik a bruttó bérek szórása? (Emelt szintű érettségi 2007. május.)

Megjegyzés

A fenti feladat a szórás fogalmának megértését is méri, hiszen az utóbbi kérdés megválaszolásához nem szükséges újabb hosszas számítást végezni, az adatok eloszlása az átlag körül, ezzel együtt az adatsor szórása nem változik. A szórás-számítás az utóbbi években már (elvétve) a középszintű feladatok között is előfordul, de a többi szóródási mutató kiszámítását ritkábban kérdezik. Nem hanyagolhatjuk el ezek gyakorlását sem, emelt szinten láthatunk példát az átlagtól való átlagos abszolút eltérés kiszámításának számonkérésére.

A valószínűség-számítás bevezetését a véletlen tömegjelenségek vizsgálatával indítjuk. Bevezetjük az esemény fogalmát, majd értelmezzük az események gyakoriságát, relatív gyakoriságát. Ezek a fogalmak már a statisztikából ismertek. A valószínűség fogalmának kialakítását kezdhetjük tapasztalati úton: érme- vagy kockadobásos kísérletek különböző kimeneteleit vizsgálva. Nagyon egyszerű kísérlet például két érme feldobásánál a két fej, két írás, egy fej-egy írás esetek vizsgálata, és tanulságos is, mert megvilágítja az esemény és elemi esemény fogalma közötti különbséget. Egyszerű kockadobásos vagy kártyahúzásos kísérletek segíthetik az eseményekkel végzett műveletek megértését. Bár az események összegének, különbségének, ellentettjének fogalmát ismerni és alkalmazni csak emelt szinten követelmény, e fogalmak középszinten is kezelhetők, különösen a halmazelméleti analógiák felhasználásával. A valószínűség fogalmának szemléletes megközelítése a relatív gyakoriságon alapul. Az elvégzett kísérletek, esetleg számítógépes szimulációk tapasztalatainak összegzéseként adódik, hogy egy adott esemény valószínűsége az az érték, amely körül az esemény relatív gyakorisága ingadozik.

A statisztika és a valószínűségszámítás kapcsolatára rávilágíthatunk az alábbi példákkal.

Példa

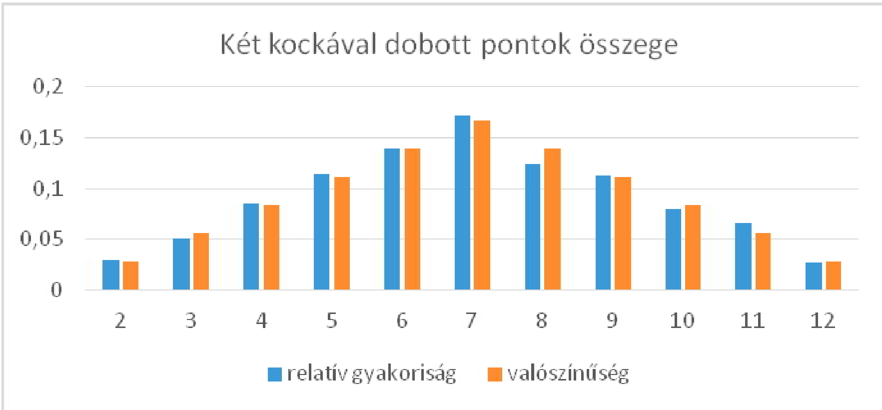
Két szabályos dobókockával dobva feljegyezzük a dobott pontok összegét. 2000 dobásra vonatkozó adatainkat tartalmazza a következő táblázat:

pontok összege	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gyakoriság	60	102	169	227	279	344	248	226	161	131	53

2. táblázat

Készítsen diagramot, mely a dobott pontösszegek relatív gyakoriságát ábrázolja! Készítsen diagramot, mely a dobott pontok összegének valószínűségét ábrázolja! (Hortobágyi I. et al. 2003: 100.)

Megoldás



5. ábra

A dobott számok összegeként értelmezett valószínűségi változónak az elméletileg számolt eloszlását összevethetjük a kísérletekből adódó statisztikai adatainkkal, ábrázolhatjuk és összevethetjük a dobott pontok öszszegének relatív gyakoriságát és a valószínűségét (az eloszlásfüggvényt).

A statisztikából már jól ismert átlag fogalmának használata segítheti a valószínűségi változó várható értékének megértését, illetve rámutathatunk a statisztikában tanult szórás és a valószínűségi változó szórásának kiszámítása közötti párhuzamra.

Példa

Számítsuk ki az előző példában a dobott pontok összegének átlagát! Mennyi a dobott pontok összegének várható értéke?

Megoldás

Általánosan: a pontok összegének lehetséges értékeit $x_1, x_2,...x_m$ -nel, gyakoriságukat $k_1, k_2,...k_m$ -nel jelölve, ahol $\sum_1^m k_i = n$ az átlaguk: $\overline{x} = \sum_1^m \frac{k_i x_i}{n}$.

A dobott pontösszegek $\frac{k_i}{n}$ relatív gyakoriságai az n növelésével a p_i elméleti valószínűség körül ingadoznak. Ebből következik, hogy az átlag a $\sum_1^m p_i x_i$ értéket közelíti, ami a várható érték.

A valószínűségszámítási feladatok zömében a Laplace-modellt használjuk, azaz a valószínűség kiszámításának kombinatorikai módszerét. A tanulók által jól ismert a „kedvező/összes” képlet, de az emelt szinten érettségizőknek tudniuk kell, hogy ez a modell bizonyos feltételek mellett alkalmazható. A kedvező és az összes eset kiszámítása általában kombinatorikai eszközöket igényel, ezért a valószínűségszámítási feladatok megoldásához a kombinatorikai ismeretek és módszerek begyakorlása, elmélyítése elengedhetetlen.

Érdemes a kombinatorikai módszereket rendszerezni, ebben megfelelő kérdések nyújthatnak iránymutatást: Számít-e a sorrend? Használunk-e minden elemet? (Csak sorbarendezés vagy sorbarendezés és kiválasztás?) Szerepelhet-e ugyanaz az elem többször is? A kérdések alapján akár táblázatba rendezhetők, így jobban áttekinthetők az ismétlés nélküli és az ismétléses permutációk, variációk, kombinációk.

Példa

Adott az A = {0; 1; 2; 3; 4; 5} halmaz. a.) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát! b.) Az A halmaz elemeiből hány olyan öttel osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek? c.) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz? (emelt szintű érettségi 2009. május)

Megjegyzés

A fenti példában alapvető kombinatorikai feladattípusok fordulnak elő: az a.) részben kombinációval, a b.) részben ismétlés nélküli permutációval, a c) részben ismétléses variációval számolhatunk. A feladat c.) kérdésének megválaszolását lényegesen leegyszerűsíti, ha az összes eset számából vonjuk ki a számunkra kedvezőtlen esetek számát. A *komplementer leszámlálás módszere* a kombinatorikai és a valószínűség-számítási feladatokban is jól használható eszköz. Érdemes a módszer bemutatása előtt a kitűzött feladatnak egy hosszabb megoldási módját is végignézni, hogy világossá váljék e módszer előnye.

Példa

Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre A, B, C, D és E. A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra, vagy sárgára, vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul? (emelt szintű érettségi 2013. október)

Megoldás

1) Felsorolhatjuk a piros, sárga, zöld élek számát megadó számhármasokat. Mivel a húrokat (végpontjaik szerint) megkülönböztetjük, az egyes eseteknek megfelelő (ismétléses) permutációk számát kell meghatározni, majd összeadni.
2) Az összes eset számából levonjuk a számunkra nem megfelelő esetek számát. Összesen 3^{10}-féle színezés lehetséges. Ha csak két adott színt használnánk, 2^{10}-féle színezés lenne, de a két színt 3-féle módon választhatjuk ki, ezért ezt a számot 3-mal szorozni kell. Beleszámoltuk ezekbe az esetekbe – összesen háromszor – azokat a színezéseket, amelyeknél csak egy színt használunk. Így a végső megoldás a *logikai szita* elve alapján: $3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3$.

A kombinatorikában és a valószínűség-számításban is sokszor gondot okoz, hogy az egyes lehetőségek számát mikor kell szorozni, illetve mikor összeadni. Célszerű a logikából ismert *„vagy”*, illetve *„és”* műveletre hivatkozni: ha az A eset n-féleképpen, egy másik, az előzőtől független B eset k-féleképpen valósulhat meg, akkor az „A és B” eset együttesen $n \cdot k$, az „vagy A vagy B” eset együttesen $n+k$ féleképpen fordulhat elő.

Példa

Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Kijelölünk e-n 5, f-en pedig 4 különböző pontot.

a) Hány (e-től és f-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont?

b) Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?
c) Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? (emelt szintű érettségi 2012. október)

Megoldás

a) Az e egyenes bármely pontja az f egyenes bármely pontjával összekötve megad egy újabb egyenest, így a megoldás: $5 \cdot 4 = 20$.
b) Két lehetőség van: az e egyenesről választunk két csúcspontot *és* az f-ről egyet, *vagy* az e-ről egyet *és* az f-ről kettőt, tehát a háromszögek száma: $\binom{5}{2} \cdot 4 + 5 \cdot \binom{4}{2} = 70.$
c) $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$ ilyen négyszög van.

A *valószínűség* tapasztalati fogalmának elmélyítést követően emelt szinten az axiomatikus megközelítést is célszerű megbeszélni a diákokkal. A definíció alapján sort keríthetünk a *valószínűség tulajdonságainak* levezetésére, ezeket alkalmazhatjuk a feladatmegoldásokban.

Példa

A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnyel. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége ($0 < p < 1$), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz? (Emelt szintű érettségi 2010. október.)

Megoldás

A logikai szita analógiájára építhetünk, amikor a valószínűség következő tulajdonságát tanítjuk:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ez alapján a kérdésre a válaszunk: $p + p - p^2 = 2p - p^2$.

A keresett valószínűséget három, egymást kizáró esemény összegének valószínűségeként is kaphatjuk, felhasználva a komplementer esemény valószínűségére vonatkozó tulajdonságot: az első húzásnál nyer *és* a másodiknál nem, *vagy* az elsőnél nem nyer *és* a másodiknál nyer, *vagy* mindkettőn nyer. Így a keresett valószínűség:

$$p(1-p)+(1-p)p+p^2=2p-p^2.$$

Feladat

Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobtunk, és feljegyeztük a fejek és írások számát.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobtunk, mint írást?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál? (Emelt szintű érettségi 2006. október.)

Megjegyzés

A pénzérme dobás típusfeladat, amelyben variációk számát kell meghatároznunk, illetve bizonyos feltételeket kielégítő eseteket összeszámolni. A feladata.) részének megoldása lényegesen lerövidíthető, ha felhasználjuk a fej-írás dobások számának szimmetriáját (*szimmetria elv*).

A statisztika témakörre visszautalhatunk a valószínűség-számítás tanításakor a mintavétellel kapcsolatos problémáknál. Az emelt szintű érettségin kitűzött feladatok között a *hipergeometrikus és a binomiális eloszlás* alkalmazására is találunk példákat. E feladatok nagy része tisztán kombinatorikus megfontolások alapján is megoldható, de a diákoknak segítséget jelenthet a megfelelő képlet ismerete. Gyakran problémát okoz a tanulóknak, hogy milyen eloszlással kell számolni. Ha a feladat szövege nem utal arra, hogy visszatevés nélküli vagy visszatevéses mintavételről van szó, akkor általánosan annyit mondhatunk, hogy amennyiben az összes elem számát ismerjük, akkor a hipergeometrikus, ha a vizsgált tulajdonság előfordulásának valószínűségét, akkor a binomiális eloszlást érdemes használni.

Feladat

Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég a véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at.

a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát!

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük!

c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos! (Emelt szintű érettségi 2007. május.)

A következő összetett feladat megoldásában a komplementerrel való számolás módszere, a hipergeometrikus és a binomiális eloszlás mellett a *feltételes valószínűség*, a teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel alkalmazása is gyakorolható.

Feladat

Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között! A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes! A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.

c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült? (Emelt szintű érettségi 2012. május.)

Felhasznált és ajánlott irodalom

Hortobágyi I., Marosvári P., Pálmay L., Pósfai P., Siposs A. & Vancsó Ö. (2003): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Feladatsorok az emelt szintű írásbeli érettségi vizsgákon: http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (2015.02.25.)

4.4. Az analízis elemeinek bevezetéséhez kapcsolódó előzetes ismeretek

Az emelt szintű érettségi vizsgakövetelményei között a függvények témakörben megjelennek az analízis olyan fogalmai, összefüggései, amelyeket a középiskolában csak matematika fakultáción vagy tagozaton tanítunk. Ezek az ismeretek meglehetősen fontosak a felsőfokú tanulmányok megalapozása miatt, és hangsúlyosan előfordulnak az emelt szintű írásbeli érettségi feladatsorokban.

A sorozatok és függvények határértékével, a differenciálszámítással, az integrálszámítással csak az utolsó két évfolyamon van lehetőségünk foglalkozni, amint erre már korábban is utaltunk. Ám ezeknek az ismereteknek az előkészítése folyamatosan történhet, egészen a 9. évfolyam elejétől kezdve.

4.4.1. Függvénytani alapfogalmak bevezetése

Emelt szinten a vizsgázónak tudnia kell az alapvető függvénytani fogalmak pontos definícióját. A függvény fogalmának, különböző megadási, szemléltetési módjainak ismerete 9. évfolyamon elvárható a diákoktól; a függvényjellemzők definiálását a fokozatos bevezetésükkel együtt számon kérhetjük. Érdemes a függvénytani alapfogalmak elmélyítésére, a jelölések használatára több időt fordítani, mert ezáltal olyan fogalmak kialakítása válik könnyebbé, mint a függvény inverze vagy az összetett függvény.

A hozzárendelések megadásának különböző módjait választva (képlettel megadott szabály, táblázat, grafikon, nyíldiagram, Venn-diagram, rendezett párok) célszerű megvizsgálni, hogy az adott hozzárendelés függvény-e, kölcsönösen egyértelmű-e, sorozat-e; függvény esetén meghatározni az értékkészletet, a megadottól különböző módon szemléltetni a hozzárendelést. Felhasználhatjuk az ilyen típusú feladatokat az induktív gondolkodás fejlesztésére, ha úgy adjuk meg a hozzárendelést, hogy a tanulóknak kell kitalálni a szabályát. A különböző ábrázolási módok segíthetnek rögzíteni az értelmezési tartomány, változó, értékkészlet, függvényérték fogalmakat, és megérteni a függvények leszűkítésének és kiterjesztésének fogalmát.

Nagyon egyszerűen és szemléletesen vezethető be a függvény, mint egyértelmű hozzárendelés, Venn-diagramon való ábrázolással. A hozzárendelés irányának megfordításával szemléletessé és érthetővé tehetjük a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés fogalmát is. Így erre a fogalomra már meglévő ismeretként utalhatunk vissza, amikor az egyes függvénytípusok megismerésekor szóba kerül az inverz függvény fogalma. Erre már 9. évfolyamon is sort keríthetünk a négyzetgyökfüggvény és a másodfokú függvény kapcsolatának vizsgálatával, majd folytathatjuk 10. évfolyamon a hatvány- és gyökfüggvények, 11. évfolyamon az exponenciális és logaritmusfüggvények tanításakor. Természetesen minden esetben érdemes az inverzfüggvények grafikonja közötti kapcsolatot is megbeszélni.

A Venn-diagram használata megkönnyítheti a – differenciálszámítás témakörben is megjelenő – összetett függvény fogalmának megértését is. Könnyebben megjegyezhető, mit tekintünk külső, illetve belső függvénynek, mint ahogyan az is, hogy általában nem mindegy, milyen sorrendben képezzük az összetett függvényt. Ezzel a fogalommal még a differenciálszámítás előtt, a geometria témakörben is találkoznak tanítványaink, a geometriai transzformációk szorzatának tanulásakor.

A következő emelt szintű érettségi feladattal nemcsak az *összetett függvényeket* gyakorolhatjuk, hanem az intervallumon értelmezett függvény példa lehet a *függvények leszűkítésére*.

Példa

Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a [–3; 4] intervallumon az

$$x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$$

hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! Legyen az *f, g* és *h* függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3,\;\; g(x) = x - 3,\; h(x) = |x|.$$

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6\,.$$

Készítse el – a fenti példának megfelelően – az *f, g* és *h* függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit! Keressen példát olyan *p* és *t,* a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre

$$(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)\,!$$

Adja meg a *p* és a *t* függvény hozzárendelési szabályát! (Emelt szintű érettségi 2006. május.)

4.4.2. Függvénytípusok, függvények ábrázolása

Az emelt szinten érettségizőknek biztos tudással kell rendelkezniük az alapvető függvényekről: a hozzárendelési szabály alapján felismerni, milyen típusú függvényről van szó, ábrázolni, és fordítva: grafikonjukról leolvasni a szabályukat.

A lineáris függvények vizsgálatánál vetődik fel először az egyenes meredekségének fogalma, amelyet azután a koordinátageometriában is használunk, majd a differenciálszámításban az érintő egyenletének felírását igénylő feladatokban tudunk alkalmazni.

A függvények ábrázolásához többnyire a függvénytranszformációkat használjuk fel. A transzformációk alkalmazása gyakran csak a hozzárendelési szabály algebrai átalakítását követően lehetséges.

Példa

Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját!

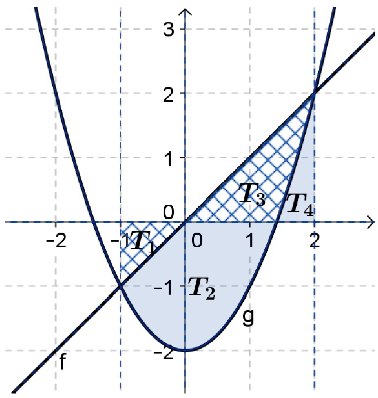
$f(x)=\dfrac{2x+5}{x+1}$ $\qquad g(x)=-x^2+6x-5$

$h(x)=\left||x+1|-2\right|$ $\qquad i(x)=|x+3|+|x-1|$

A függvénytranszformációkról tanultakra támaszkodhatunk az integrálszámítás témakörben a két függvénygörbe által közrefogott terület kiszámításánál.

Példa

Számítsuk ki az $f(x)=x$ és az $g(x)=x^2-2$ függvények grafikonja által közrezárt síkidom területét!



6. ábra

Megjegyzés

A határozott integrál geometriai jelentését felhasználva az *1. ábra* jelöléseivel:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = -T_1 + T_3 + T_4 \quad \text{és} \quad \int_{-1}^{2} g(x)dx = -T_1 - T_2 + T_4 \quad \Rightarrow$$

$$T_2 + T_3 = \int_{-1}^{2} f(x)dx - \int_{-1}^{2} g(x)dx\,,$$

azaz a közrezárt terület: $T_2 + T_3 = \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)dx\,.$

A problémát az okozza, hogy az integrál értéke a függvénygörbe alatti, illetve feletti terület mérőszámát előjelesen adja meg. Könnyen belátható, hogy mindkét görbét ugyanannyival feljebb tolva az y-tengely mentén, a közrezárt terület nem változik meg, miközben mindkét függvény szabálya egyformán változik: ugyanazzal a konstanssal növeltük. Így a közrezárt területre felírt utolsó képlet mindig igaz.

4.4.3. Függvényvizsgálat

A függvények jellemzési szempontjai közül az értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, menet, szélsőérték fogalmával 9. évfolyamon is foglalkozunk. Már ekkor beszélhetünk a lokális szélsőérték fogalmáról, amit grafikonok vizsgálatával könnyen megértenek a tanítványaink. A következő évfolyamon a trigonometrikus függvények adnak alkalmat a korlátosság, paritás, periodicitás fogalmának bevezetésére. Fakultációs órákon érdemes néhány kevésbé kézenfekvő példával elmélyíteni ezeket a fogalmakat.

Példa

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$$f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 4)} \qquad g(x) = \lg(2\cos x - \sqrt{2})$$

Megjegyzés

Az első példában egy másodfokú és egy logaritmikus egyenlőtlenség megoldáshalmazának metszete, a másodikban egy trigonometrikus egyenlőtlenség megoldása adja meg az értelmezési tartományt. Mindkét kifejezés egy többszörösen összetett függvény, a differenciálhányados kiszámításának gyakorlására is alkalmasak lehetnek.

Példa

Állapítsuk meg, hogy a következő függvények grafikonja hol metszi a tengelyeket!

$f(x) = x \cdot \cos x \qquad g(x) = x^3 - 9x$

Megjegyzés

A grafikonok ábrázolása nem egyszerű, ezért célszerű számítással próbálkozni. Átismételhetjük, hogy az $f(x_0)$ az x_0 helyen felvett függvényérték, tehát $f(0)$ megadja a grafikon y-tengellyel való metszéspontját. A zérushely pedig az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása.

Példa

Jellemezzük az alábbi függvényeket a következő szempontok szerint: szélsőérték, menet, korlátosság, paritás, periodicitás!

$$f(x) = 0 \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x\ páros \\ 0, & ha\ x \notin Z \\ -1, & ha\ x\ páratlan \end{cases} \qquad h(x) = \{x\} \qquad i(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$$

Megjegyzés

A fenti példák kapcsán több dologra rávilágíthatunk. Megbeszélhetjük, hogy az abszolútszélsőérték létezése elegendő, de nem szükséges feltétele a(z egyik oldali) korlátosságnak; hogy a szélsőértékét a függvény nemcsak egy helyen veheti fel. Kitérhetünk a monotonitás értelmezésére (különböző tankönyvek eltérő definíciói). Bemutathatjuk,hogy a periodikus függvénynek nem feltétlenül létezik periódusa, illetve azt, hogy egy függvénynek megegyezhet a maximuma és a minimuma, sőt, lehet egyszerre páros és páratlan. Szemléletesen vizsgálhatjuk a folytonosságukat, még a fogalom pontos definiálása előtt.

A differenciálszámításban lényeges tulajdonság, a folytonosság szemléletes értelmezésére támaszkodunk az irracionális kitevőjű hatvány fogalmának értelmezése során is.

A folytonosság és a határérték fogalmának bevezetésére alkalmasak a törtfüggvények, az egészrész, a törtrész és a szignumfüggvények. Az alábbi függvényekkel a véges helyen vett véges, illetve végtelen határértékre, a végtelenben vett véges és végtelen határértékre mutathatunk példákat. A $j(x)$ függvény annak szemléltetésére alkalmas, hogy bizonyos helyeken nincs határértéke a függvénynek.

Példa

Ábrázoljuk a következő függvényeket!

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},\quad g(x)=\frac{x+1}{x^2-1},\quad h(x)=\frac{1}{|x|},\quad j(x)=\operatorname{sgn}(2x^2+3x-2)$$

4.4.4. Sorozatok

A függvények határértékének egy lehetséges definíciója a sorozatok határértékének fogalmán alapul. Bármilyen sorrendben is vegyük ezeket a fejezeteket, érdemes utalni erre a kapcsolatra. A sorozatokat önálló fejezetként tanítjuk 12. évfolyamon. De a függvény fogalmának, a függvénytípusoknak a tanítása során már korábban megbeszélhetjük, hogy a sorozat is függvény, a lineáris, majd az exponenciális függvényeknél utalhatunk a számtani és mértani sorozatokra. A sorozatok, mint függvények jellemzői közül a monotonitásra és a korlátosságra fókuszálunk, a pontos alsó, illetve felső korlát meghatározása előkészítheti a konvergencia fogalmát. Később megvizsgáljuk ezeknek a tulajdonságoknak és a határértéknek a kapcsolatát.

Példa

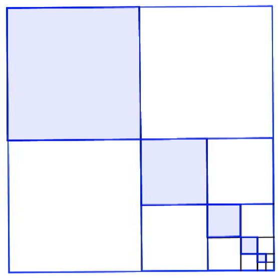
Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ $(n\in N^+)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos! (Emelt szintű érettségi 2012. május.)

A mértani sorozat összegképletének ismeretében és a q^n sorozat határértékének vizsgálata után levezethetjük a mértani sor összegére vonatkozó képletet. A mértani sor összegét nagyon egyszerű példákkal szemléltethetjük is, így a végtelen fogalmát akár alsóbb évesek számára is közelebb hozhatjuk.

Példa

Állapítsuk meg az ábra segítségével az

$S=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{4^n}+...$ végtelen összeg értékét!



7. ábra

4.4.5. Az analízis elemeinek megalapozása más témakörökben

A differenciál- és integrálszámítás bevezetését elsősorban a függvénytani ismeretek átismétlésével célszerű kezdeni. A középiskolai tanulmányok során azonban számos olyan terület van, amely e téma feldolgozását, megértését megalapozhatja. A teljesség igénye nélkül néhány további példa: egyenletek megoldásának módszerei (zérushelyek kiszámítása), végtelen nem szakaszos tizedestörtek (végtelen mértani sor összege), egyenes egyenlete (érintő felírása), első n négyzetszám összege (a parabolikus háromszög területének kiszámításához – határozott integrál fogalma), nevezetes szorzatok (algebrai törtkifejezéssel megadott sorozat, függvény határértékének kiszámítása, hatványfüggvény deriváltjának levezetése).

A differenciálszámítás alkalmazásainak egyik fő területe a szélsőérték-feladatok megoldása. Ilyen feladatokkal először 10. évfolyamon találkoznak a tanulók: a nevezetes közepek felhasználásával, illetve másodfokú függvények vizsgálatával megoldható példák formájában. E feladatok nehézségét általában az adja, hogy fel kell ismerni, mi a vizsgálandó tulajdonság, majd – mivel ezt általában több változóval tudjuk leírni – meg kell találni azt az összefüggést, amely segítségével egyváltozós függvényként írható fel. Ha ezeket a lépéseket megtanulják és gyakorlatot szereznek benne tanulóink, akkor már csak a kapott függvény szélsőértékét kell meghatározniuk, amelyhez kiváló eszközt ad kezükbe a differenciálszámítás.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bartha G., Bogdán Z., Duró L., Gyapjas F., Hack, F., Kántor S. & Korányi E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi I., Marosvári P., Pálmay L., Pósfai P., SipossA. &Vancsó Ö. (2003): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Pósa L. (1999): *Összefoglalás*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

5. A bizonyítás tanításának kérdései

BALLA Éva

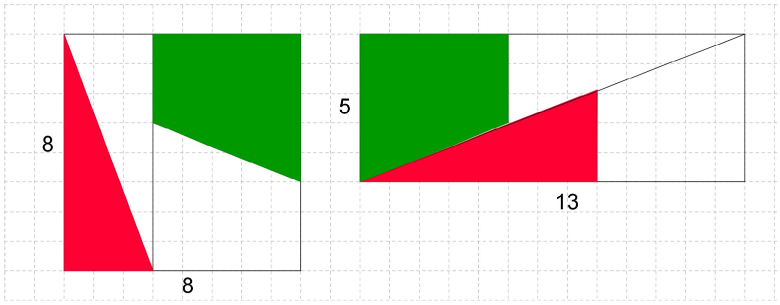
5.1. Bizonyítások tanításának szükségessége és lehetősége matematika órán

A kétszintű érettségi rendszer bevezetése előtt az írásbeli érettségi vizsga feladatsorában minden évben kitűztek egy elméleti kérdést, többnyire egy középiskolában tanult tétel bizonyítását. A kétszintű érettségi bevezetésével a középszintű követelmények között már nem szerepel bizonyítás, ez csak emelt szinten követelmény. A részletes érettségi vizsgakövetelmények meghatározzák, mely tételek bizonyítása elvárt egy emelt szinten érettségiző tanulótól, de az írásbeli vizsgán nincs ilyen feladat; a kiadott szóbeli tételsor alapján pedig a vizsgázó maga készül fel az adott témából, önállóan dönti el, hogyan építi fel az adott témakört, és ebben mely tétel vagy tételek bizonyítását ismerteti. Szükség van-e hát matematika órán (alapórán) a tételek bizonyításának megbeszélésére vagy a felszabaduló időt használjuk inkább az alkalmazások ismertetésére, feladatok begyakorlására?

Az érvényben levő matematika kerettanterv szerint (2014: 3):
„A matematika oktatása elképzelhetetlen állítások, tételek tanítása nélkül. Hogy a tananyagban szereplő tételek beláttatása során milyen elfogadott igazságokból indulunk ki, s mennyire részletezünk egy bizonyítást, nagymértékben függ az állítás súlyától, a csoport befogadó képességétől, a rendelkezésre álló időtől, stb. Ami fontos, az a bizonyítás iránti igény felkeltése, a logikai levezetés szükségességének megértetése. … A fejlesztési cél elérése szempontjából – egy adott tanulói közösség számára – nem feltétlenül a tantervben szereplő (nevesített) tételek a legalkalmasabbak a bizonyítás bemutatására, gyakorlására.”

5.1.1. Bizonyítási igény felkeltése (pl. paradoxonok, igaz vagy hamis állítások)

Példa



1. ábra

A Fibonacci-számok felhasználásával alkotott háromszögek és trapézok más elrendezésben különböző területű téglalapokat adnak. Hol a hiba?

Megoldás

Az *1. ábrán* a színessel jelölt trapéz és háromszög egy-egy oldala csak látszólag esik egy egyenesbe. Hogyan igazolható ez az állítás?

1) Trigonometria felhasználásával: pl. a trapéz tompaszögének és a háromszög nagyobbik hegyesszögének kiszámításával. (Összegük nem 180°.)
2) Koordinátageometria felhasználásával (a lineáris függvények témában is alkalmazható): a két egyenes meredeksége különbözik.

Megjegyzés

Ismert optikai illúziók is alkalmasak az érdeklődés felébresztésére, és annak megmutatására, hogy ne mindig higgyünk a szemünknek.

5.1.2. Bizonyítás különböző szinteken

A tanítás során figyelnünk kell arra, hogy a matematikai tartalom ne vesszen el a formalizmusra koncentrálás közben. A bizonyítások tanításakor a gondolkodási folyamat fontosabb a szimbólumok alkalmazásánál. Alsóbb évfolyamokon a bizonyítás mindig egy konkrét cselekvésből indul ki, formalizmusra nincs szükség. Később a konkrét példákat követi az általánosítás is. Fontos, hogy minden lépés matematikailag korrekt legyen (a megfelelő szinten), így a konkrét cselekvés és a formális matematikai bizonyítás egyes lépései párhuzamba állíthatók (a konkrét esetek az általános esetet szemléltetik).

Példa
Határozzuk meg az első *n* természetes szám összegét!

Megoldás
1) Szemléletesen: Tekintsük az alábbi elrendezéseket:

2. ábra

A *2. ábra* bal oldali elrendezésében látható négyzetek száma: 1 + 2 + 3 + 4 + 5, ugyanez az összeg a bal oldali ábráról leolvasva: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (5 · 6) / 2 = 15.

2) Konkrét példával: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = S. A tagokat párosíthatjuk: S = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, így a kétféleképp felírt összegben (az első és az utolsó, a második és az utolsó előtti stb.) párba állított számok összege: 2S = 11 + 11 + 11 + … + 11 = 10 · 11 = 110, ami a keresett összeg kétszerese.

3) A szemléletes és a konkrét példa során csak olyan lépéseket használtunk, amelyeket bármely természetes szám esetén el tudunk végezni. Így a bizonyítás gondolatmenete, ezzel az állítás is általánosítható:

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Példa
Bori ismétlődő mintákat pötyög egy zsebszámológépbe: 378378, 634634, 772772. Elosztja ezeket az évszámmal, 2002-vel, és mindegyik esetben egész számot kap eredményül. Szerencséje volt? (Szendrei J. 2004: 144)

Megoldás

Néhány próbálkozás után megfogalmazható a következő sejtés: az olyan hatjegyű páros számok, amelyeket egy háromjegyű páros szám kétszer egymás után írásával kapunk, oszthatók 2002-vel.

Bizonyítás:

1) Konkrét példa alapján: A hatjegyű szám első három jegyéből álló szám felét megszorozva 2002-vel, ilyen típusú szorzások végezhető el:

$$\begin{array}{l} \underline{317} \cdot 2002 \\ 634 \\ \quad\;\; 0 \\ \quad\;\;\; 0 \\ \underline{\quad\;\; 634} \\ 634634 \end{array}$$

Minden ilyen szorzás hasonló elrendezésű, tehát egy-egy, a fentiekben leírt tulajdonságú hatjegyű számot ad. Az összes ilyen hatjegyű szám előállítható a megfelelő háromjegyű (kétjegyű) szám szorzásával.

2) Absztraktabb módon, betűk használatával:

A hatjegyű szám legyen abcabc, az abc háromjegyű páros szám fele xyz alakú (ahol x lehet 0).

$$\begin{array}{l} \underline{xyz} \cdot 2002 \\ abc \\ \quad\;\; 0 \\ \quad\;\;\; 0 \\ \underline{\quad\;\; abc} \\ abcabc \end{array}$$

3) Betűk és helyiértékes írásmód használatával:

$$abcabc = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100100a + 10010b + 1001c$$

Mivel c páros számjegy, ezért írható helyette 2k (k = 0; 1; 2; 3; 4), így
$abcabc = 100100a + 10010b + 2002k = 2002(50a + 5b + k)$,
vagyis osztható 2002-vel.

5.1.3. Bizonyítások tanítása (kerettanterv), fejlesztési követelmények

- Kísérletezés, módszeres próbálkozás, sejtés, cáfolás megkülönböztetése
- Gondolatmenet tagolása
- Rendszerezés (érvek logikus sorrendje)
- Következtetés megítélése helyessége szerint
- Kidolgozott bizonyítás gondolatmenetének követése, megértése
- Példák a hétköznapi életből helyes és helytelenül megfogalmazott következtetésekre.

Kísérletezés, módszeres próbálkozás, sejtés, cáfolás.
Az ellenpélda szerepe

Feladat
Egy természetes szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal is. Igaz-e, hogy egy természetes szám pontosan akkor osztható
a) 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is,
b) 24-gyel, ha osztható 4-gyel és 6-tal is?

Feladat
Igaz-e, hogy a $K = 3(n-1)^2 + 8$ kifejezés előállítható három természetes szám négyzetének összegeként, ha n természetes szám?

Feladat
Igaz-e, hogy az $n^2 + n + 41$ kifejezés mindig prímszámot ad meg, ha az n természetes szám?

Gondolatmenet tagolása

Példa
Soroljuk fel a magasságtétel bizonyításának lépéseit!

Megoldás
1. hasonló háromszögek keresése
2. hasonlóság indoklása
3. hasonlóság felhasználása: összetartozó aránypárok
4. egyenletrendezés

Rendszerezés (érvek logikus sorrendje)

Feladat
A $\sqrt{2}$ irracionális voltára vonatkozó tétel bizonyításában egymás után következő állítások sorrendjét felcseréljük, a feladat megtalálni a helyes sorrendet.

Következtetés megítélése helyessége szerint. Példák a hétköznapi életből helyes és helytelenül megfogalmazott következtetésekre.

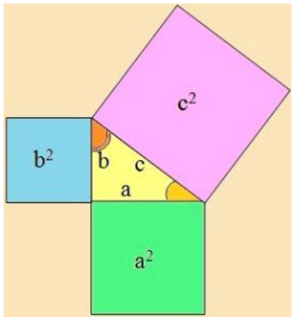
Feladat
Igazak-e az alábbi következtetések? (http://www.math.klte.hu/~kovacsa/Logika.pdf)

a) Ha Béla minden elméleti tételt megtanul, és a beugró gyakorlati számítást is megoldja, akkor sikerül a vizsgája. Béla minden tételt megtanul, és mégsem sikerül a vizsga. Tehát Béla a beugró gyakorlati számítást nem oldotta meg.
b) Ha cunami-riadó van, akkor Kálmán nem megy strandolni. Kálmán nem megy strandolni. Tehát cunami-riadó van.

Kidolgozott bizonyítás gondolatmenetének követése, megértése
A megértés gátjai lehetnek: hiányzó alapismeretek, „*rejtett axiómák*", elmarad a fogalom „háziasítása". „*Érdemes a bizonyításokat sokkal „szájba rágósabbá" tenni, amikor a tanulók már tiltakoznak ellene, akkor érnek el a következő szintre.*" (Szendrei J. 2004: 141.)

Feladat
Mi a „rejtett axióma" Pitagorasz tételének alábbi bizonyításban?
(http://szamtan.ingyenweb.hu/keret.cgi?/szabalyok/szabalyok_p/pitagorasz_bizonyitas.htm)

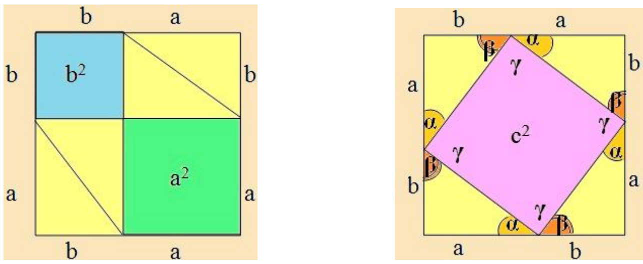
Tétel
A derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területeinek összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével: $a^2 + b^2 = c^2$ (*3. ábra*).



3. ábra

Bizonyítás

Az $a+b$ oldalú négyzetbe rajzoljuk be az a^2 és b^2 területű négyzeteket, illetve a *4 db*, eredetivel is egybevágó derékszögű háromszöget. Egy másik $a + b$ oldalú négyzetbe rajzoljuk be a *4 db*, eredetivel is egybevágó derékszögű háromszöget. (*4. ábra*)



4. ábra

A belül keletkezett négyszög biztosan rombusz, hiszen minden oldala c hosszúságú. A derékszögű háromszög két hegyesszögének összege ($\alpha + \beta =$) 90^o. A rombusz csúcsa mellett egy α és egy β szög található. Ezért a rombusz szöge csak $\gamma = 90^o$-os lehet ($\alpha + \beta + \gamma = 180^o$), és ez minden szögére igaz, tehát ez a rombusz négyzet. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Szendrei, J.: (2004): *Gondolod, hogy egyre megy?*Budapest, Typotex Kiadó

Kovács, A.: *Matematikai logika,* http://www.math.klte.hu/~kovacsa/Logika.pdf (2014.11.12.).

Pitagorasz tételének bizonyítása,http://szamtan.ingyenweb.hu/keret.cgi?/szabalyok/szabalyok_p/pitagorasz_bizonyitas.htm. (2015. 06. 02.)

Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára – Matemati*ka.* 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 3. melléklete, Módosítva a 34/2014. (IV. 29.) EMMI rendelet 4. mellékletének megfelelően, http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html (2015. 06. 02.)

5.2. Bizonyítási módszerek bemutatása és elemzése különböző témakörökhöz kapcsolódó példákon keresztül

5.2.1. Direkt bizonyítási módszer

Sémája: feltétel + ismert igaz állítás felhasználása = következmény, ugyanez ismétlődik, míg a bizonyítandó állítást kapjuk.

Példák

1) Bizonyítsuk a Thalesz-tételt!
2) Vezessük le a másodfokú egyenlet megoldóképletét!
3) Igazoljuk a 9-cel oszthatóság szabályát!

Megjegyzés

Konkrét példákon keresztül bemutatható a gondolatmenet (például konkrét egyenletet oldjunk meg teljes négyzetté kiegészítéssel). Ugyanezeket a lépéseket kell használni az általános bizonyításban.

Példa

Igazoljuk, hogy az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz!

Megjegyzés

Konstrukciós bizonyítást végzünk: megadunk egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést N és Z között.

5.2.2. Indirekt bizonyítási módszer

Sémája: indirekt feltevés (az eredeti állítás hamis) + ismert igaz állítás felhasználása → következmény, ugyanez ismétlődik, míg ellentmondásra nem jutunk.

Az indirekt bizonyítások logikai alapja, hogy [redacted] mindig hamis, és [redacted] mindig igaz.

Példák

1) Bizonyítsuk be, hogy a prímszámok száma végtelen!
2) Bizonyítsuk be a Pitagorasz-tétel megfordítását!
3) Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám!

Példa

Bizonyítsuk be, hogy a $\log_2 5$ irracionális.

Megoldás

Tegyük fel, hogy $\log_2 5$ racionális, vagyis felírható két egész szám hányadosaként:

$$\log_2 5 = \frac{a}{b}, \text{ ahol } a, b \in Z^+.$$

A logaritmus definíciója szerint $2^{\frac{a}{b}} = 5$.

Emeljük mindkét oldalt a b-edik hatványra: $2^a = 5^b$.

A baloldal páros, a jobb oldal páratlan, nem lehetnek egyenlők. Az ellentmondás oka: az indirekt feltevés hamis.

Feladat

Egy 15-ös létszámú versenyen mindenki minden ellenfelével egyszer mérkőzik. Eddig 98 mérkőzést játszottak le. Bizonyítsuk be, hogy van olyan résztvevő, aki már befejezte a versenyt!

Megjegyzés

A fenti példákban az indirekt bizonyítások módszere a *reductio ad absurdum*; a bizonyítandó állítás tagadásával és helyes logikai következtetésekkel ellentmondáshoz jutunk. Az indirekt bizonyításokhoz sorolható az *elimináció* módszere is**.** Akkor alkalmazhatjuk, hogy ha egy állítás matematikai objektumok olyan halmazára vonatkozik, amely több részhalmazra bontható. Ha az állítás szerint az egyik részhalmaz elemei rendelkeznek egy bizonyos tulajdonsággal, ezt úgy mutatjuk meg, hogy kizárjuk a többi részhalmaz elemeit. (Makó Z. és Téglási I. 2011)

Példa

Bizonyítsuk be a Thalesz-tétel megfordítását!

Megjegyzés

A bizonyítás elve lehet a következő: ha egy pontból a kör átmérője derékszögben látszik, akkor a pont nem lehet a körön kívül, nem lehet a körön belül, tehát csak a körön lehet.

5.2.3. Teljes indukciós bizonyítási módszer

Pozitív egész számoktól függő állítások bizonyítására alkalmas módszer. Sémája: az állítás igazolása a legkisebb konkrét esetre + indukciós feltevés + a tulajdonság öröklődésének bizonyítása (ha az állítás igaz n-re, akkor igaz n+1-re is).

A teljes indukciós bizonyítás használható pl. negatív egészek, egészek, páros természetes számok halmazára vonatkozó állítások esetében is. A módszert leggyakrabban a következő feladatokban alkalmazzuk: oszthatósági állítások bizonyítása; természetes számokra vonatkozó egyenlőségek, egyenlőtlenségek igazolása; sorozatok tulajdonságainak igazolása; összegformulák igazolása; geometriai alkalmazások.

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \quad (n \in Z^+)$!

Példa

Bizonyítsuk be, hogy $2^n > n^2$, ha $n > 4$ és n egész szám!

(Gádor E. et al. 1990: 411)

Megoldás

n =5-re igaz, mert $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

Feltesszük, hogy valamely n > 4 egészre igaz az állítás, és bizonyítani fogjuk n+1-re. Azt kell igazolni, hogy $2^{n+1} > (n+1)^2$. Az indukciós feltevés szerint $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$.

Ha bizonyítjuk, hogy

$2n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 > 2n+1$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 > 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > 2 \Leftrightarrow (n-1)^2 > 2$ igaz,

akkor készen vagyunk. Az utolsó egyenlőtlenség viszont minden n > 4 feltételt teljesítő egész számra fennáll.

Megjegyzés

Ha tudjuk, hogy a > b, és be akarjuk látni, hogy a > c, elég belátnunk, hogy b > c. De ez nem feltétlenül igaz! (b > c elegendő, de nem szükséges feltétele az a > c egyenlőtlenség igaz voltának.)

Példa

Legyen az (a_n) sorozat a következő:

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ \ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \quad (n \in N^+).$

Határozzuk meg a_{151} értékét! (Pósa L. 1999: 135)

Megoldás

A sorozat első néhány tagja:

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ a_4 = 9,\ a_5 = 16$.

A sejtésünk ez alapján: $a_n = (n-1)^2$. Ezt bizonyítjuk.

a) A fenti képlet igaz n = 1-re **és n = 2**-re. (Fontos, mert a (k + 1). tag előállításához a k. és a (k – 1). tagra is szükség van!)
b) Feltéve, hogy a sejtésünk igaz k-1-re és k-ra,
   ($a_k = (k-1)^2 \quad a_{k-1} = (k-2)^2$),
c) igazoljuk, hogy az utánuk következő számra, azaz k+1-re is igaz.
   $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2 = 2(k-1)^2 - (k-2)^2 + 2 = k^2$.

A bizonyítással kész vagyunk, mert az állítás igaz n = 1-re, n = 2-re (ellenőriztük), de ha igaz két szomszédos számra, akkor a rájuk következőre is, ezért igaz n = 3-ra; de akkor n = 4-re is (mert igaz 2-re és 3-ra), stb. így bármely pozitív egészre igaz. A keresett tag értéke

$a_{151} = 150^2 = 22500$.

Feladat
Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3} \quad (n \in Z,\, n \geq 2)$$

Megjegyzés
A tanulók számára világossá kell tenni, mit jelent a bal oldali összeg. Ezért célszerű nemcsak az n = 1-re, hanem 2-re, 3-ra is ellenőriztetni az állítást.

Példa
Adjunk meg képletet az első n köbszám összegére!

Megjegyzés
n = 1, 2, 3, 4, ... tag összegzésével megsejthető, teljes indukcióval bizonyítható az állítás: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Feladat
Bizonyítsuk be, hogy n egyenes a síkot legfeljebb

$\frac{n^2 + n + 2}{2}$ részre bontja!

5.2.4. Skatulyaelv

Ha n skatulyába $n+1$ tárgyat helyezünk el, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül. (Ha n skatulyába nk-nál több tárgyat helyezünk el, akkor lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe legalább $k+1$ tárgy kerül.)

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább két fős társaságban van két olyan ember, akiknek a társaság tagjai között ugyanannyi ismerőse van! (Az ismeretség kölcsönös.)

Megjegyzés

A feladat egyenértékű a következővel: Igazoljuk, hogy bármely legalább két pontú egyszerű gráfnak van két azonos fokszámú pontja.

Feladat

Igazoljuk, hogy $n+1$ tetszőleges pozitív egész szám közt van két olyan, melyek különbsége osztható n-nel! (Az n pozitív egész.)

Megjegyzés

A bizonyítás feladható különböző szinteken: $n = 10$-re, $n = 7$-re, általánosan n-re.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok tizedestört alakja véges vagy végtelen szakaszos tizedestört!

Megoldás

A racionális szám legyen

$\frac{p}{q}$ alakú, $q \neq 0,\ q \in N$.

A tizedestört alakját úgy kapjuk, hogy a számlálót osztjuk a nevezővel. Ha valamelyik maradék 0, akkor véges tizedestörtet kapunk. Ha egyik maradék sem 0, akkor legfeljebb $q - 1$ különböző osztási maradék képződhet, azaz legfeljebb $q - 1$ lépés után valamelyik ismétlődni fog, ezért ismétlődő szakasz keletkezik.

Feladat

Négyzetrácson kijelölünk 5 rácspontot, és ezeket páronként összekötjük. Igazoljuk, hogy a keletkező szakaszok között van olyan, amely a végpontokon kívül is tartalmaz rácspontot!

5.2.5. Invariáns módszer

Sémája: olyan mennyiséget keresünk, amely a változtatások során állandó marad. Így ennek a feltételnek az elérendő helyzetben is teljesülnie kell.

Példa

Egy táblára felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat. Ezután két számot letörlünk, és helyette a különbségüket írjuk fel. Ezt kilencszer elvégezve előfordulhat-e, hogy a megmaradó szám 0? (Róka S. 2000: 118)

Megoldás

Két azonos paritású szám törlésekor páros szám kerül a helyükre, különböző paritásúak törlésekor páratlan szám. Ezért a páratlan számok száma csak kettesével csökkenhet, és mivel a táblán eredetileg öt páratlan szám volt, így mindig páratlan darab páratlan számnak kell lennie. Az utolsóként megmaradó szám tehát csak páratlan lehet, nem 0.

Példa

Egy kocka csúcsaiba számokat írunk úgy, hogy az egyik csúcsban kezdetben 1, a többi csúcsban 0 van. Egy-egy alkalommal egy él két végpontjában levő számokat 1-gyel növeljük. Elérhető-e, hogy végül minden csúcsban ugyanaz a szám álljon? (Róka S. 2000: 120)

Megoldás

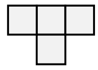
Minden lépésben 2-vel nő a csúcsokban álló számok összege, amely kezdetben 1 volt. Így a számok összegének mindig páratlannak kell lennie, tehát nem érhető el a kívánt helyzet.

5.2.6. Konstrukciós bizonyítás

Példa

Lefedhető-e az *5. ábrán* látható alakzattal hézagmentesen, egy rétegben egy

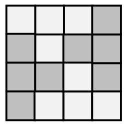
a. *4 x 4*-es, b. *5 x 5*-ös, c. *10 x 10*-es négyzetrács? (Róka S. 2000:130)



5. ábra

Megoldás

a) Lefedhető, a *6. ábrán* látható módon.



6. ábra

b) Nem, mert egy alakzat 4 kis négyzetet fed le, az 5 x 5-ös négyzetrács lefedése 25 négyzet lefedését jelenti, de 25 nem osztható 4-gyel.

c) Nem fedhető le. Színezzük a négyzetrácsot sakktábla-szerűen. Tegyük fel, hogy a lefedés megoldható. Egy adott alakzat vagy 3, vagy 1 sötét mezőt fed le. Legyen az első fajtából felhasznált alakzatok száma k darab. A 100 mező lefedéséhez 25 alakzatra van szükség, tehát a másik fajtából 25 – k darabot használunk fel. A 100 mező fele sötét, így 50 = 3k + (25 – k) egyenletnek kell teljesülnie, ha a lefedés megvalósítható. De ebből 25=2k következik, ami lehetetlen.

5.2.7. Egy állítás – többféle bizonyítási módszer

Példa

Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$!

Megoldás

1) Teljes indukcióval

2) Teleszkópos összeggel

Példa

Határozzuk meg egy *n* elemű halmaz részhalmazainak számát.

Megoldás
1) Teljes indukcióval
2) Variációkkal
3) Binomiális tétel alapján

Felhasznált és ajánlott irodalom

Pósa L. (1999): *Összefoglalás*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Gádor E., Gyapjas F., Hárspatakiné D.V., Korányi E., Pogáts F., Reiman I. & Scharnitzky V. (1990): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Budapest, Tankönyvkiadó.

Róka S. (2000): *2000 feladat az elemi matematika köréből*. Budapest, Typotex Kiadó.

Makó, Z. & Téglási, I. (2011): *Indoklás és bizonyítás*, Kempelen Farkas Hallgatói Információs Központ, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Mako_Zita_Teglasi_Ilona-Indoklas_es_bizonyitas/index.html(2015. 06. 02.).

Tanítási anyagaink, Fazekas Mihály Gyakorlóiskola, Matematika oktatási portál, http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok(2015. 01. 31.)

5.3. Példák bizonyításokban előforduló hibákra, hiányosságokra

5.3.1. Helyes következtetés. Feltétel szükségessége, elégségessége

Példa

Helyes-e a következő bizonyítás?

Igazoljuk a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget!

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ (1)

Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát!

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a \cdot b$ (2)

Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd szorozzunk a nevezővel!

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ (3)

Ebből következik, hogy $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (4)

a bal oldal teljes négyzetté alakítható $(a-b)^2 \geq 0$. (5)

Ez utóbbi egyenlőtlenség nyilván igaz, mert minden szám négyzete nagyobb vagy egyenlő, mint 0. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megoldás

Először is az *a, b* pozitív számok, mert pl. –8 és –2 választásánál nem igaz az egyenlőtlenség. Ezzel a feltétellel együtt igaz, hogy az 5 egyenlőtlenség ekvivalens egymással, és mivel (5) mindig igaz, ezért (1) is igaz. Az átalakítások ekvivalens voltát jelezni is kell!

Feladat

Helyes-e a következő bizonyítás?

Bizonyítsuk a $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ azonosságot! ($a, b \geq 0$).

Tegyük fel, hogy $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$,

és emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát!

$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2$

Használjuk fel a szorzat hatványozására vonatkozó azonosságot!

$\left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2$

A négyzetgyök definíciójából következik, hogy: $ab = ab$, ami mindig igaz, ezzel beláttuk, hogy a $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ valóban azonosság.

Feladat

Helyes-e a következő bizonyítás?

Igaz-e minden valós x-re, hogy $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$?

Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot felhasználva azonosságra jutunk, tehát igaz.

Megjegyzések

– Ha egy A állításból igaz állításra tudunk következtetni, abból nem következik, hogy A igaz! Pl. $-8 = -10$ / +9, ebből $1 = -1$, emeljük négyzetre, 1 = 1, igaz.

– Egyenletek megoldásánál megfelelő eljárás, ha következmény egyenleteket írunk fel. Ha az átalakítások nem ekvivalensek, legfeljebb kapunk hamis gyököket is. Ezeket az ellenőrzéssel kiszűrhetjük (feltéve, hogy nem végtelen sok gyököt kapunk. Ha mégis, marad az ekvivalencia vizsgálat). Bizonyításnál ekvivalens átalakításokra van szükség.

Példa

Tekintsük a következő állításokat!

$A\colon xy = 6x + 15$ $\qquad$ $B\colon x^2 y = 6x^2 + 15x$

Következik-e *A* állításból *B* állítás? Következik-e *B* állításból *A* állítás? (Ekvivalens-e a két egyenlet?)

Megoldás

Ha *A* igaz, akkor *B* is mindig igaz. $A \Rightarrow B$. Ha *B* igaz, akkor *A* is mindig igaz? Nem igaz, pl. x = 0, y = 1 esetén *B* igaz, de *A* hamis. *B*-ből nem következik *A*.

5.3.2. Hiányos tételbizonyítások

Előfordul, hogy a bizonyításokból kimarad egy olyan gondolati lépés, amelynek hiányában az igazolandó állításnál kevesebbet bizonyítunk.

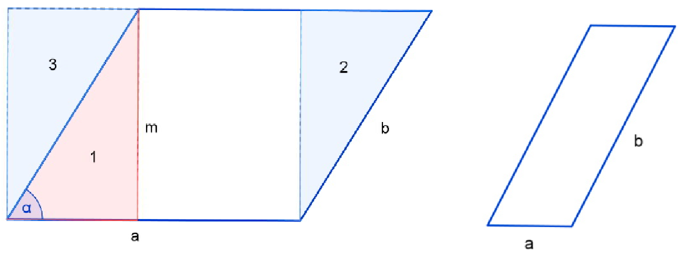
Példa

Mutassuk meg, hogy hiányos az alábbi tételbizonyítás!

Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma területe egyenlő az oldalhosszának és az ehhez tartozó magasságának szorzatával.

Bizonyítás**:** Azt látjuk be, hogy a (téglalaptól különböző) paralelogramma területe egyenlő az azonos alapú és magasságú téglalap területével.

1) Átdarabolással: az *7. ábrán* az 1, 2 és 3-mal jelölt háromszögek egybevágók, így a 2-vel jelölt háromszöget 3-ba eltolva a bizonyítandó állítást kapjuk. (*Hiányos*!)



7. ábra

2) Ha az átdarabolás az előbbi módon nem végezhető el (második paralelogramma), akkor hivatkozzunk a szimmetriára: ha az egyik oldalra nem hajtható végre az átdarabolás, akkor hajtsuk végre a másikra. (*Hiányos*!)

Megjegyzés

Az 1.) eset vizsgálata nem elég. A 2.) indoklással sem teljes a megoldás. Ezzel ugyanis az eredeti tételt nem láttuk be, csak annyit igazolhatunk, hogy a paralelogrammának van olyan oldala, melynek hosszát a hozzá tartozó magassággal szorozva a területét kapjuk. De ehhez is hozzátartozna annak a vizsgálata, hogy ha pl. az *a* oldal nem megfelelő, a *b* oldal jó lesz. (Az *a* oldalra az*1. ábra* jelölései szerint nem végezhető el az átdarabolás, ha $b\cos\alpha > a$, a *b* oldalra pedig akkor nem, ha $a\cos\alpha > b$. Mindkét egyenlőtlenség nem állhat fenn egyszerre, amit pl. az első $\cos\alpha$-val való szorzásával beláthatunk: $b\cos^2\alpha > a\cos\alpha > b$ nem lehet.) E helyett pl. a második paralelogrammát az *a* oldalával párhuzamos szakaszokkal bontsuk olyan paralelogrammákra, amelyekre az 1. pont szerinti átdarabolás elvégezhető. A részparalelogrammák területének összege az eredeti paralelogramma területét, a részek magasságának összege az eredeti paralelogramma magasságát adja.

Példa

Indokoljuk, hogy miért hiányos az alábbi tétel bizonyítása!

Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, és ez a pont a súlyvonalak csúcstól távolabbi harmadolópontja.

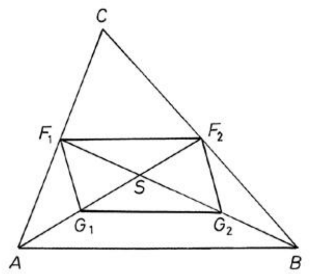
Bizonyítás (hasonlóságot nem használva):

Húzzuk meg az ABC háromszög A és B csúcspontjából kiinduló súlyvonalait.

A *8. ábra* F_1F_2 szakasza a háromszög egyik középvonala,

ezért [redacted].

Jelöljük a két súlyvonal metszéspontját S-sel. Az ABS háromszögnek rajzoljuk meg az AB oldalával párhuzamos középvonalát. Ez az AS, illetve a BS szakaszok G_1, illetve G_2 felezőpontját összekötő szakasz.



8. ábra

Erre a középvonalra [redacted].

Ezek miatt $G_1G_2 \parallel F_1F_2$ és $G_1G_2 = F_1F_2$.

Ebből következik, hogy a $G_1G_2F_2F_1$ négyszög paralelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, tehát $G_1S = SF_2$. A G_1 pontot azonban felezéssel kaptuk, így $AG_1 = G_1S = SF_2$. Ezért fennáll az alábbi arány:

$AS : SF_2. = 2 : 1.$

Tehát a két súlyvonal metszéspontja, az S pont, a súlyvonalakat a csúcsoktól számítva 2 : 1 arányban osztja két részre.

Megjegyzés

Még nem bizonyított, hogy a három súlyvonal egy pontban metszi egymást. Hiányzik, hogy ez az arány bármely két súlyvonalra fennáll, ezért a harmadik súlyvonalnak is át kell haladna ezen a ponton.

Előfordulhat, hogy a bizonyításban felhasznált lényeges állítást „elhallgatunk."

Példa

Miért hiányos az alábbi bizonyítás?

A logaritmus azonosságainak igazolása. Állítás:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, ha $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$.

Bizonyítás:

a logaritmus definíciója szerint $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$, $xy = a^{\log_a xy}$.

Az első két egyenlőtlenséget és az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot felhasználva:

$xy = a^{\log_a x + \log_a y}$.

Az *xy* szorzatra kapott két egyenletet összevetve adódik az állítás.

Megjegyzés

Az állítás azért igaz, mert a kitevők egyenlőségét az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű (vagy szigorúan monoton) volta biztosítja. De pl. *sinx* = *siny* egyenletből nem következne, hogy *x* = *y*.

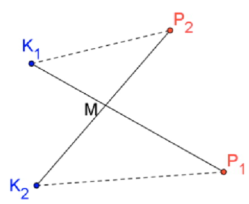
5.3.3. Bizonyítási feladatokban előforduló hibák, hiányosságok

Példa

Mi a hiba az alábbi bizonyításban?

Adott a síkon általános helyzetben *n* darab piros és *n* darab kék pont. Bizonyítsuk be, hogy megadható *n* darab szakasz a síkon úgy, hogy bármely szakasz egy piros és egy kék pontot kössön össze, és semelyik két szakasz ne metssze egymást. (Bogdán 1990: 32.)

Bizonyítás: Ha két szakasz metszi egymást, vegyük fel másképp a pontokat összekötő szakaszokat úgy, hogy különböző színű pontokat kössenek össze, de ne metsszék egymást. Pl. a *9. ábrán* a folytonos vonallal jelölt szakaszok helyett a szaggatottal jelölteket. Ilyen módon a metszéspontok száma csökkenthető, ezt a lépést ismételve, az eljárás végén nem marad metszéspont.



9. ábra

Megjegyzés

A megoldás hibás, mert az új szakaszokon keletkezhet újabb metszéspont. A metszéspontok száma tehát nem feltétlenül csökken az egyes lépések során. Viszont indokolhatunk úgy, a háromszög-egyenlőtlenség miatt $K_1P_2<K_1M+MP_2$ és $K_2P_1<K_2M+MP_1$, ezért $K_1P_2+K_2P_1<K_1P_1+K_2P_2$. Azaz a szakaszok összhossza minden lépésben (minden egyes metszéspont megszüntetésével) csökken, így a lehetséges minimális összhosszúság elérése után nem lehet metszéspont. (Mivel összesen véges számú – $n!$ – lehetőség van a különböző színű pontok összekötésére, van közöttük minimális összhosszúságú.)

Példa

Mi hiányzik az alábbi bizonyításból?

Egy sík 20 egyenese 187 metszéspontot határoz meg. Igazoljuk, hogy az egyenesek között vannak párhuzamosak!

Bizonyítás: 20 egyenes legfeljebb $(20 \cdot 19) : 2 = 190$ metszéspontot határoz meg. A maximálisan elérhető metszéspontok számát 3-mal kell csökkenteni. Ha nincsenek párhuzamos egyenesek a megadottak között, ez csak úgy lehetséges, ha legalább három egyenes egy pontban metszi egymást. Ha három egyenes metszi egymást egy pontban, akkor a három lehetséges metszéspont helyett csak egy lesz, tehát a metszéspontok száma kettővel csökken. Több ilyen hármas metszésponttal tehát a metszéspontok száma csak páros számmal csökkenthető, így nem érhető el a kívánt helyzet. Ha 4 egyenesnek van közös metszéspontja, akkor a lehetséges 6 metszéspont helyett 1 metszéspont keletkezik, így a metszéspontok száma 5-tel csökken. Ha 4-nél több egyenesnek van egyetlen metszéspontja, még többel csökken az összes metszéspont száma. Ilyen módon tehát a 187 metszéspont nem érhető el, vagyis az egyenesek között vannak párhuzamosak.

Megjegyzés

Hiányzik a létezés bizonyítása, vagyis, hogy a 187 metszéspont megvalósítható. Pl. ha 18 általános helyzetű egyenest veszünk (153 metszéspont), és 2 olyat, amelyek a 18 közül az egyikkel párhuzamos (ezek a többivel 34 újabb metszéspontot adnak).

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bogdán Z. (1990): *Matematika feladatok – ötletek – megoldások II*. Budapest, Tankönyvkiadó.

Csíkos Cs. (1999): *Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség*. http://www.staff.u-szeged.hu/~csikoscs/publik/csikos_mp99_1.pdf (2015. 02. 04.)

Pósa L. (1999): *Összefoglalás*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Tanítási anyagaink, Fazekas Mihály Gyakorlóiskola, Matematika oktatási portál, http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok (2015. 01. 31.)

6. *Függvénytani eszközök alkalmazása különböző témakörök tanításában*

PAULOVITS György

6.1. A függvény-transzformációk tanítása GeoGebra segítségével

A függvény-transzformációk tanítását a 9. évfolyamon, a nevezetes függvénytípusok és jellemzési szempontok bevezetésével egyidejűleg érdemes elkezdeni. A lineáris függvény erre még kevés lehetőséget nyújt, így nagyobb hangsúlyt a másodfokú függvények oktatása során kaphat először. Ha a másodfokú függvényeket már elég jól begyakoroltattuk, érdemes összefoglalni a függvény-transzformációkat, hogy a további függvénytípusoknál is jól tudjuk használni rendszerezett ismereteinket.

Változó-transzformációk:
– $f(x+c)$: eltolás az x tengely mentén, - c egységgel;
– $f(c\cdot x)$: $\frac{1}{c}$ – szeres nyújtás az x tengely mentén ($c>0$);
– $f(-x)$: tükrözés az y tengelyre.

Érték-transzformációk:
– $f(x)+c$: eltolás az y tengely mentén c egységgel
– $c\cdot f(x)$: c-szeres nyújtás az y tengely mentén $(c>0)$
– $-f(x)$: tükrözés az x tengelyre.

Ezt megtehetnénk a 9. évfolyamos függvénytani témakör végén is, de ha itt tesszük, az ezek után következő függvénytípusok ábrázolása során jó szolgálatot tehet ismeretük.

Az abszolút érték fogalmának felelevenítése után foglalkozhatunk az *abszolútérték-függvénnyel* és transzformációival. Kezdeti példáink felölelhetik az $f(x)=a|x-u|+v$ típusú függvények ábrázolását és jellemzését – ezekkel nem lesz túlságosan nehéz dolgunk, ha a másodfokú függvényt sikerült jól elsajátíttatnunk, hiszen a megfelelő függvények mérhető jellemzői többnyire azonosak.

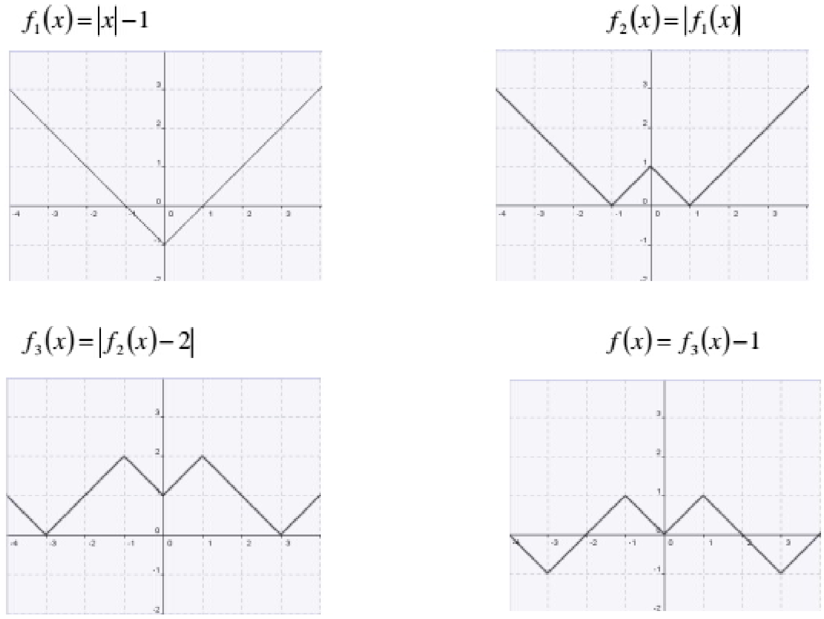
Általában nehezebben megy az olyan függvények értelmezése, amik két abszolút értékes kifejezés összegeként vagy különbségeként adódnak.

Az egymásba ágyazott abszolútérték-jeleket tartalmazó függvények ábrázolása során támaszkodhatunk a transzformációs lépésekről megszerzett ismeretekre. Ha van rá lehetőségünk, az ilyen, összetettebb feladatok megoldását számítógép-termes órán, vagy táskagépek segítségével végezzük, például a GeoGebra szoftverrel, hiszen így az egyes lépések gyorsabban elvégezhetők, könnyebben nyomon követhetők.

Példa

Ábrázoljuk függvény-transzformációkkal az
$f: R \to R,\ f(x) = \left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 2\right| - 1$ függvényt!

Megoldás



1. ábra

Megjegyzés

Az egyes lépések ábrázolását érdemes különböző színnel, vonalvastagsággal végezni, illetve kiemelni a legutolsó lépéssel adódott képet. Minden lépés során jó, ha tudatosítjuk az adott transzformáció hatását. A füzetbe ilyenkor legfeljebb az utolsó lépést érdemes rögzíteni, és a jellemzést is inkább szóban végezzük, legfeljebb otthon rögzíttessük.

A *lineáris törtfüggvények* tárgyalása kapcsán mindenekelőtt érdemes feleleveníteni a fordított arányosság általános iskolában már tanult fogalmát. Ezután az alapfüggvény,

az $f : R \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x},\ (x \neq 0)$

ábrázolását és jellemzését végezzük el, kitérve arra, hogy ennek a képe hiperbola, amelynek aszimptotái az x és az y tengely. (Ezeket az aszimptotákat egyébként a transzformált függvények esetén is mindig érdemes, legalább szaggatott vonallal berajzoltatni.)

A függvény jellemzése során fontos felhívnunk a figyelmet arra, hogy a menet leírását a görbe két ágára külön-külön kell végeznünk. Nem teljesül ugyanis, hogy ez a függvény a teljes értelmezési tartományon szigorúan monoton csökkenő volna, de

az $]-\infty;0[$, illetve a $]0;+\infty[$ résztartományokon igen.

A szokásos egy-két lépéses transzformációk bemutatásán, begyakorlásán túl itt is gyakorolnunk érdemes olyan átalakítást, amit korábban, a számelmélet tárgyalása során megismerhettünk.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x) = \dfrac{5-2x}{x-3},\ (x \in R, x \neq 3)$ függvényt!

Megoldás

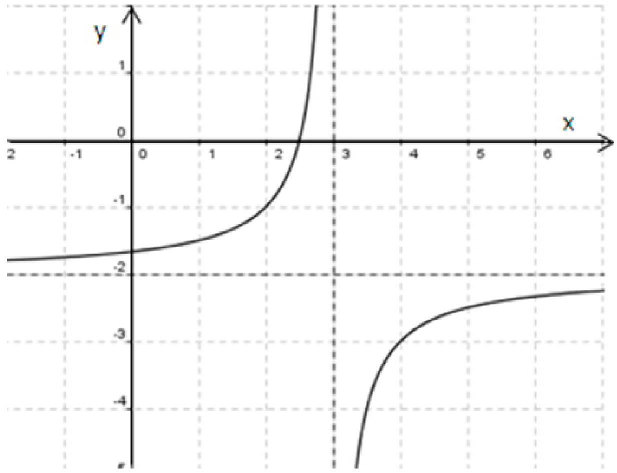
Mindenekelőtt a számelmélet-fejezetben megismert módon leválasztjuk a számláló „egész-részét”:

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-3} = \frac{-2(x-3)-1}{x-3} = \frac{-2(x-3)}{x-3} - \frac{1}{x-3} = -2 - \frac{1}{x-3}$$

Ha most is lehetőségünk nyílik a GeoGebra program használatára, akkor természetesen ekkor is érdemes lépésenként ábrázoltatni a függvényt, ügyelve azonban arra, hogy az ábránk ne legyen nagyon kaotikus – a korábbi lépéseket törölni szükséges a jellemzők megvitatása után.

Az $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $f_3(x)=-\dfrac{1}{x-3}$
függvények ábrázolása után adódó *f(x)* képe mellett mindenképpen érdemes berajzoltatni a $x = 3$ és az $y = -2$ aszimptotákat (*2. ábra*).

Ismertessük fel, hogy a zérushely számítással történő meghatározásához a legelső, átalakítás nélküli alakból érdemes kiindulni!



2. ábra

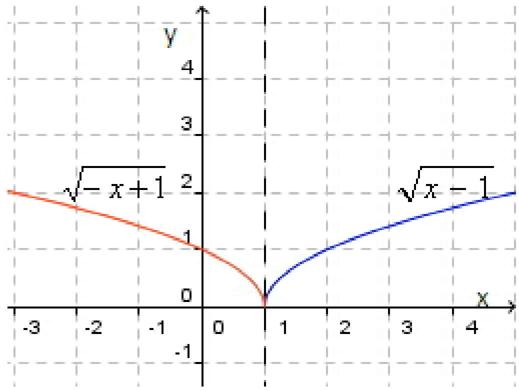
A függvény-transzformációk tanítására természetesen további lehetőségeink adódnak a felsőbb évfolyamokon. A 10. évfolyamon szokás a négyzetgyök-függvénnyel foglalkozni.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x)=\sqrt{-x+1}$ függvényt!

Megoldás

Érdemes mindenekelőtt az $f(x)=\sqrt{-(x-1)}$ átalakítást elvégezni, hiszen így el tudjuk magyarázni, hogy transzformációkkal ábrázolva először az x tengely mentén pozitív irányba kell tolnunk 1 egységgel az alapfüggvényt, majd ezt kell tükröznünk az y tengelyt helyettesítő $x = 1$ egyenesre (*3.ábra)*. Ezt a gyakorlatunkat később, a trigonometrikus függvények ábrázolása során is nagyon jól tudjuk kamatoztatni.



3. ábra

A 10. évfolyamon vezetjük be a szögfüggvényeket is. Ezek általánosítása után kell ábrázolnunk a trigonometrikus alapfüggvényeket és azok transzformációit. A két koordinátatengelyen beállított egységek felvétele úgy közelít legjobban a valósághoz, ha a négyzetrácsos lapon az y tengelyen két négyzetet választunk egységnek, az x tengelyen pedig három négyzet lesz a $\frac{\pi}{2}$ értéke. A függvények jellemzése során mindenképpen figyelnünk kell a periódusra, illetve annak változására, továbbá a változó-transzformációk elvégzésére.

Példa

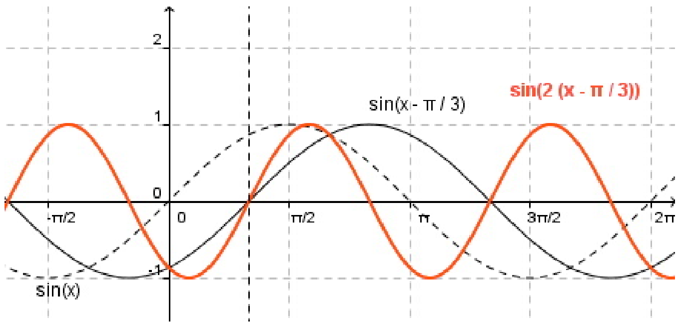
Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right),\ x\in R$ függvényt!

Megjegyzés

Az ábrázolás előtt célszerű elvégezni a következő átalakítást:

$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Így világossá tehető, hogy a szinuszfüggvényt először az x tengely mentén pozitív irányban kell eltolnunk $\frac{\pi}{3}$ egységgel, majd a függvény $x=\frac{\pi}{3}$ *egyenesre eső pontjához képest* kell kicsinyítenünk az x tengely irányában felére. Jó, ha az egyes transzformációs lépéseknek megfelelő függvényeket is feltüntetjük ábránkon *(4. ábra)*.



4. ábra

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

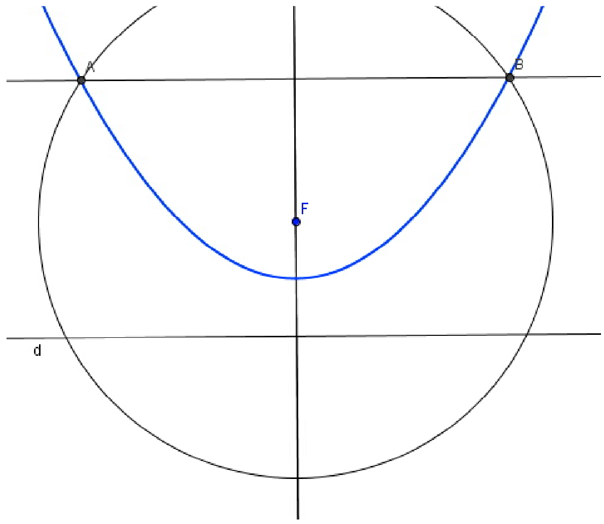
Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi, E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

6.2. A másodfokú függvény és a parabola mint ponthalmaz kapcsolata

A parabola fogalmát a 9. évfolyamon kezdjük kialakítani. A nevezetes ponthalmazok tárgyalása során érdemes kitérnünk rá, megszerkesztve néhány pontját és kimondva definícióját is.

Definíció
Legyen adott a síkon a *d* egyenes és a *d*-re nem illeszkedő *F* pont. A *d* vezéregyenesű, *F* fókuszpontú parabola a sík azon pontjainak halmaza, amelyek *d*-től és *F*-től egyenlő távolságra vannak (*5. ábra*).



5. ábra

A szerkesztést érdemes a GeoGebra program Mértani hely funkciója segítségével megvalósítani. Igaz, e programnak parabola-rajzoló funkciója is van, mégis megéri a szerkesztés lépéseit modellezni, majd az említett funkció használatával megrajzoltatni a pontokat.

Később, még a 9. évfolyamon a másodfokú függvények kapcsán újra előkerül a parabola fogalma. Mivel általában ekkor már túl vagyunk az algebrai átalakítások begyakoroltatásán, így célszerű a teljes négyzetté alakítás módszerét is felhasználni a függvényelemzéshez.

Példa

Ábrázolja és jellemezze az $f: R \to R,\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ függvényt!

Megoldás

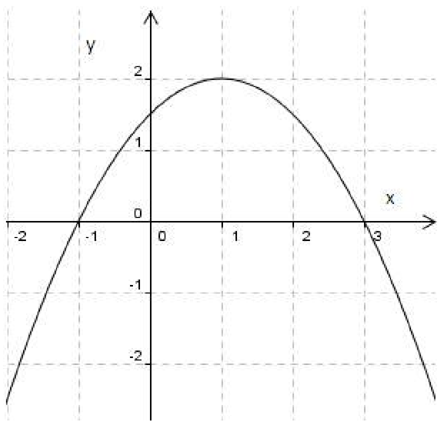
A teljes négyzetté alakítást a másodfokú tag negatív előjele és tört-együtthatója esetén különösen nehezen tudják elvégezni a diákok. Az $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) = -\frac{1}{2}\left[(x-1)^2 - 1 - 3\right] = -\frac{1}{2}\left[(x-1)^2 - 4\right] = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ átalakítás-sorozat után felismertetjük, hogy a fordított állású parabola tengelypontja a T (1;2) pont, így jól ábrázolható és jellemezhető a függvényünk.

Az ábrázolást szintén érdemes a táska-számítógépek segítségével, GeoGebra programmal végezni, ahol szemléletesen megjeleníthetjük a transzformációs lépéseket, akár külön színnel, vonalstílussal megjelenítve az egyes lépéseknek megfelelő grafikonokat, közösen hangsúlyozva a látványhoz tartozó transzformációkat:

$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-1)^2$

$f_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \qquad f_4(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2$

A végső, eredetileg megadott f függvényt (a kép segítségével) jellemeznünk is szükséges (*6. ábra*).



6. ábra

Ha az esetlegesen pontatlan ábrázolás miatt nem olvashatjuk le pontosan a zérushelyeket,

a $-\frac{1}{2}(x-1)^2+2=0$

egyenletet a megoldóképlet nélkül is meg tudjuk oldani – ez is a teljes négyzetté alakítás előnye.

A 10. évfolyamon, a másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek témakörén belül is nagy hangsúlyt kell, hogy kapjon a másodfokú függvény képének ismerete. A 9. évfolyamon megszerzett tudás felelevenítése, elmélyítése segíthet a paraméteres másodfokú egyenletek, illetve az egyenlőtlenségek megoldása során is. Ekkor is célszerű egy-egy órán gép mellett foglalkoztatni a diákokat.

Példa

A p valós paraméter melyik értékénél lesz az

$x^2+(p+1)x-3p+2=0$

egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege a legkisebb? Mekkora ez a legkisebb érték?

Megoldás

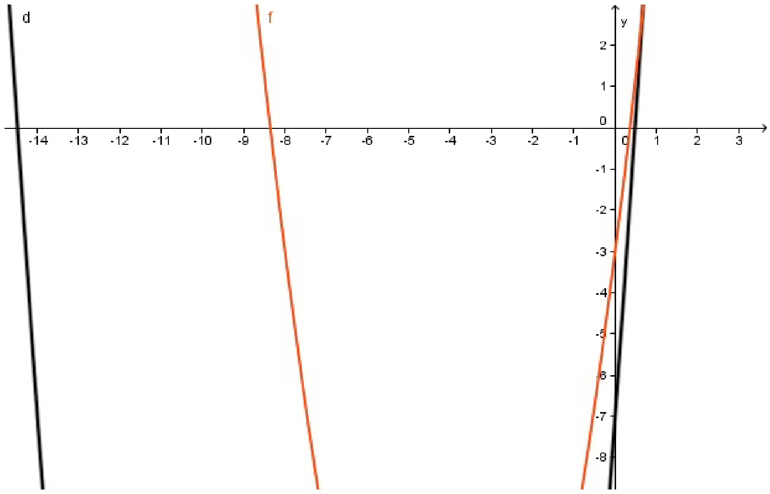
Mindenekelőtt fel kell hívnunk a figyelmet diszkrimináns-vizsgálat szükségességére.

A $d(p)=(p+1)^2-4(-3p+2)\geq 0$ feltétel vizsgálata során előbb elvégezzük a $d(p)=p^2+14p-7$ átalakítást, majd meghatározzuk a függvény zérushelyeit. Mivel $p_{1,2}=-7\pm 2\sqrt{14}$, és $d(p)$ képe normál állású parabola, ezért az egyenletnek $p\leq -7-2\sqrt{14}$, illetve $p\geq -7+2\sqrt{14}$ esetén van valós gyöke. Ezután – például a Viéte-formulák segítségével – vizsgálnunk kell a gyökök négyzetösszegét: mivel

$f(p)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$,

ezért $f(p)=(p+1)^2-2(-3p+2)=p^2+8p-3$,

szintén normálállású parabola. Ez utóbbi szélsőérték-helye $p = -4$, itt azonban egyenletünknek nincs valós gyöke, ráadásul a valós gyökök négyzetösszege ekkor $f(-4) = -19$ volna, ami szintén lehetetlen. A két parabolát közös koordináta-rendszerben ábrázolva szemléletesen kapjuk a feladat megoldását (*7. ábra*).

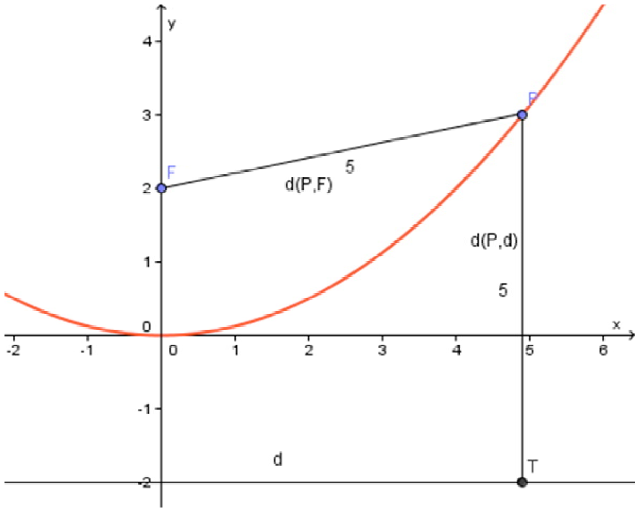


7. ábra

A *7.ábrát* elemezve láthatjuk, hogy $p = -7 + 2\sqrt{14}$ esetén lesz a gyökök négyzetösszege minimális, s kiszámolható ez a minimális érték is: $f\left(-7 + 2\sqrt{14}\right) = 46 - 12\sqrt{14}$. A megoldás ellenőrzéseként visszahelyettesítjük a kapott p értéket az eredeti egyenletbe, és láthatóan valóban teljes négyzetet kapunk: $x^2 + 2\left(\sqrt{14} - 3\right)x + \left(\sqrt{14} - 3\right)^2 = 0$. Így a valós gyökök négyzetösszege akkor lesz minimális, ha $x_1 = x_2 = 3 - \sqrt{14}$.

Ezeket az ismereteinket más témakörök feldolgozása során is kamatoztathatjuk, például az egyenlőtlenségek során; de a négyzetgyökös, illetve logaritmusos egyenletek feltételvizsgálata is nagyszerű lehetőséget ad erre.

A 11. évfolyamon a koordináta-geometria tárgyalása során találkozunk újra a parabolával. Ekkor – jobb csoportokban, illetve emelt szinten – ismét érdemes feleleveníteni a síkgeometriai definíciót, hogy aztán levezethessük az y tengelyű, normál állású, origó tengelypontú parabola általános egyenletét. Mivel ekkor már túl vagyunk a parabolapontok szerkesztésén, így a GeoGebrával elegendő olyan ábrát készítenünk, amin a fókuszpont és a vezéregyenes megadása után a program berajzolja a görbét. Ha ezek után a görbe egy pontját kijelöljük és lemérjük ennek távolságát a fókuszponttól és a vezéregyenestől, nyilvánvalóan azonos értéket kell kapnunk a pont görbén történő mozgatása esetén minden helyzetben (*8. ábra*). E szemléltetés után következhet a levezetés, az ismert módon.



8. ábra

Érdemes a GeoGebra segítségével is kitérni a fordított állású, továbbá az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák szemléltetésére is.

A parabolával kapcsolatos feladatok megoldása során itt is sikerrel használhatjuk a GeoGebra programot.

Példa

Mi az $y = 4x^2 - 4(a+1)x + a^2 + 4a - 1$ egyenletű parabolák csúcspontjának halmaza, ha az a paraméter tetszőleges valós szám?

Megoldás

A megoldás során mindenekelőtt meg kell határoznunk a csúcspont koordinátáit. Ezt megtehetjük a teljes négyzetté alakítással, de ha már megismertettük a diákokkal korábban a differenciálszámítás elemeit, akkor a deriválást is segítségül hívhatjuk.

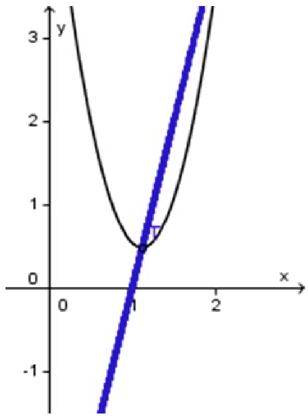
A $T\left(\frac{a+1}{2}; 2a-2\right)$ tengelypont koordinátái közül a szemléltetéshez az elsőre lesz szükségünk.

A GeoGebra programba belépve mindenekelőtt megadjuk az *a* = *1* paramétert, majd az $f(x) = 4x^2 - 4(a+1)x + a^2 + 4a - 1$ függvényt. Ugyanitt ábrázoljuk az $x=\frac{a+1}{2}$ egyenest, majd a Két alakzat metszéspontja menüpont segítségével megjelöljük a T tengelypontot. Ekkor célszerű az $x=\frac{a+1}{2}$ egyenest láthatatlanná tenni, hogy ne legyen zavaróan sok alakzat az ábránkon. A továbbiakban a T ponthoz tartozó Nyomvonal funkciót bekapcsoljuk, majd az a érték csúszkáját beállítjuk például -2 kezdeti és 3 végértékkel, 0,01-es beosztással, Fix értékre, Növekvő megjelenítésre. Az animálási funkció bekapcsolása után máris kirajzolódik a feladat megoldásául szolgáló egyenes képe.

Mindez természetesen csupán a szemléltetést szolgálja: ezek után meg kell adnunk a ponthalmaz egyenletét. Ezt megtehetjük például azzal, ha az

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{a+1}{2} \\ y=2a-2 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerből kiküszöböljük az a paramétert. Az így kapott $y=4x-4$ egyenes képe valóban az a nyomvonal, amit a programmal sikerült kirajzoltatnunk (*9. ábra*).



9. ábra

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr.Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi,E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

6.3. A nevezetes középértékek tanítása

A nevezetes középértékeket hagyományosan a 10. évfolyamon ismertetjük meg a diákokkal. A két elemre bemutatott középértékek, nagyságrendi viszonyaik bevezetésén túl érdemes ilyenkor n elemre is általánosítani a definíciókat és összefüggéseket.

Definíció
Legyen $a,b \in R$, $a,b \neq 0$ és $a \neq -b$.
Ekkor az *a* és *b* számok harmonikus középértéke:
$$H(a;b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Definíció
Legyen $a,b \in R$, $a,b \geq 0$.
Ekkor az *a* és *b* számok *mértani középértéke:* $M(a;b) = \sqrt{a \cdot b}$.

Definíció
Legyen $a,b \in R$.
Ekkor az *a* és *b* számok *számtani középértéke:* $S(a;b) = \dfrac{a+b}{2}$.

Definíció
Legyen $a,b \in R$.
Ekkor az *a* és *b* számok négyzetes középértéke: $N(a;b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Tétel
Legyen $a,b \in R$, $b \geq a > 0$.
Ekkor az *a*és *b* számok középértékeire fennáll az
$$a \leq H(a;b) \leq M(a;b) \leq S(a;b) \leq N(a;b) \leq b$$
összefüggés. Egyenlőségmindenütt pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$.

A fenti tételt – amit a könnyebb megjegyezhetőség kedvéért gyakran „HÍMSÜN”-tételként szoktunk emlegetni – érdemes bizonyítani is. A bizonyítás számtalan lehetősége közül a leggyakrabban talán az algebrai átalakítások alkalmazását választjuk.

Például a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség bizonyítását a következőképpen végezhetjük el (a tétel feltételei változatlanok):

$$\sqrt{a \cdot b} \overset{?}{\leq} \frac{a+b}{2} \quad /(\ )^2$$

$$a \cdot b \overset{?}{\leq} \frac{a^2+2 \cdot a \cdot b+b^2}{4} \quad / \cdot 4,\ -4 \cdot a \cdot b$$

$$0 \overset{?}{\leq} a^2-2 \cdot a \cdot b+b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2$$

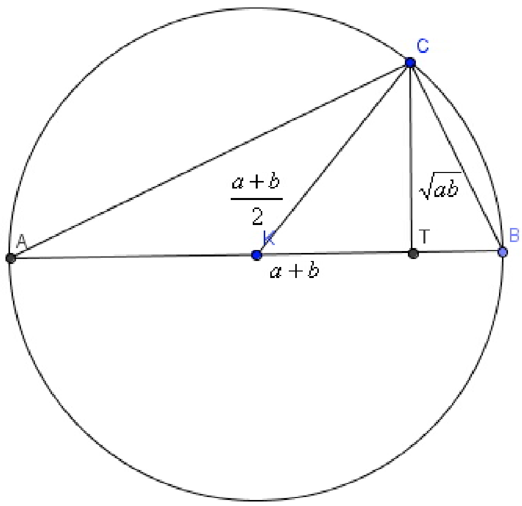
Miután nyilvánvalóan teljesülő egyenlőtlenségre jutottunk, már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az adott alaphalmazon azonos átalakításokat végeztünk-e. Miután erre igenlő a válaszunk, így az eredeti egyenlőtlenség igazságát is beláttuk, és az utolsó alak segít a tétel második felének bizonyításában is.

Megjegyzések

– Ha nem tesszük ki a kérdőjeleket az egyenlőtlenség-jelek fölé, és nem vizsgáljuk meg az átalakítások megfordíthatóságát, akkor hiányos marad a bizonyításunk!
– Ha egy egyenlőtlenséget így, közösen bebizonyítunk a tanórán, akkor a többi belátását házi feladatként is kitűzhetjük.

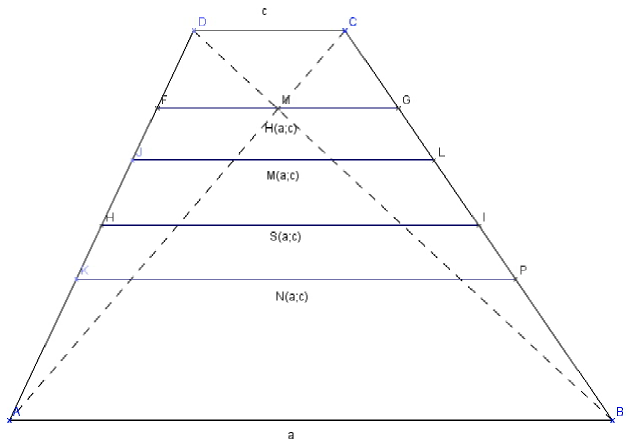
Célszerű ugyanezt az egyenlőtlenséget – pozitív számokra vonatkoztatva – geometriai úton is szemléltetni, felhasználva Thálesz tételét és a magasságtételt.

Legyen $AT=a$, $TB=b$, ahol T az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának talppontja. Ekkor KC a kör sugara, tehát hossza $\frac{a+b}{2}$, a magasságtétel értelmében pedig $CT=\sqrt{ab}$. Így a KCT derékszögű háromszöget vizsgálva szemléletesen látható az állítás (*10. ábra*).



10. ábra

A trapéz alapjaival párhuzamos szakaszok segítségével szintén jól szemléltethetjük a nevezetes középértékeket, illetve nagyságrendi viszonyukat. A *11. ábrán* látható szakaszok közül ugyanis az *FG* szakasz átmegy az átlók *M* metszéspontján, a párhuzamos szelők tétele segítségével belátható, hogy hossza *H(a;c)*; a *JL* szakasz a trapézt két hasonló trapézra bontja, így hossza *M(a;c)*. A *HI* szakasz a trapéz középvonala, hossza *S(a;c)*, míg a *KP* két egyenlő területű trapézra bontja az eredeti síkidomot, hossza bizonyíthatóan *N(a;c)*.



11. ábra

Ha már a trapézt vizsgáljuk, ne feledkezzünk el arról a szép összefüggésről, amely szerint ha az *MDC* háromszög területe *t*, az ABM-é pedig *T*, akkor az *AMD*, illetve a *BMC* háromszögek (egyenlő) területe $\sqrt{t \cdot T}$. Mindezek a hasonlóság témakörén belül jó lehetőséget adnak szép feladatok kitűzésére.

Feladatokban gyakran fel kell használnunk a középértékek közötti egyenlőtlenségek általánosított alakját is, így azt is célszerű bemutatni.

Tétel

Legyen $a_i > 0,\ i = 1,2,...,n$.

Ekkor érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$a_1 \le a_2 \le \ldots\ldots \le a_n$

$$a_1 \le \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \le a_n .$$

Egyenlőség mindenütt pontosan akkor áll fenn, ha

$a_i = a_j \quad \forall\ i, j \in \{1,2,...n\}$-re.

A gyakorlást természetesen egyszerűbb feladatokkal érdemes kezdeni.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy $\forall\ a > 0$ esetén $a + \frac{1}{a} \ge 2$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az *a* értéke 1!

Megjegyzés

A fenti példa már csak azért is kiemelt fontosságú, mert számos feladat megoldása során sikerrel alkalmazható összefüggés. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \ge \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$, ahonnan mindkét állítás azonnal adódik.

Mindenképpen meg kell említenünk ekkor a $\forall\ a < 0$ esetén fennálló $a + \frac{1}{a} \le -2$ egyenlőtlenséget is!

Példa

Legyen az x és y pozitív valós számok szorzata 50, továbbá $x > y$! Határozzuk meg

a $K(x;y)=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ kifejezés minimumának értékét!

Adjuk meg az $\dfrac{x}{y}$ aránynak azt az értékét, amelyre a kifejezés a minimumát felveszi!

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=x-y+\dfrac{2xy}{x-y}$.

Erre alkalmazva a számtani és mértani közép összefüggését:

$$\frac{x-y+\dfrac{2xy}{x-y}}{2}\geq\sqrt{(x-y)\frac{2xy}{x-y}}=\sqrt{2xy}=10\text{, vagyis } K(x;y)\geq 20$$

és egyenlőség akkor és csak akkor következik be, ha $x-y=\dfrac{2xy}{x-y}$,

azaz $x^2-4xy+y^2=0$. Látható, hogy ez utóbbi egyenlet

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4\cdot\dfrac{x}{y}+1=0$ alakra hozható, ahonnan $\dfrac{x}{y}=2+\sqrt{3}$ következik, figyelembe véve, hogy $x>y$.

Célszerű megmutatnunk, hogy a matematika más területein, például a geometriában is alkalmazhatjuk a nevezetes középértékek tételét.

Példa

Legyenek a háromszög oldalai a, b, c, területe pedig t! Bizonyítsuk be, hogy fennáll az

$a^2+b^2+c^2\geq 4t\sqrt{3}$ egyenlőtlenség! Milyen esetben áll fenn egyenlőség?

Megjegyzés

A Hérón-képlet alkalmazásához először korlátozzuk felülről annak egy részletét:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \le \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{s}{3} \text{ miatt}$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{s^3}{27} \text{ és így } t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \le \sqrt{\frac{s^4}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

Ebből következően

$$4t\sqrt{3} \le \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \le 3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2 = a^2+b^2+c^2,$$

ami az állításunk bizonyítását jelenti.

Példa

Melyik hegyesszögű háromszögben lesz minimális a $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma$ szorzat értéke (az α, β, γ a háromszög szögei)?

Megjegyzés

Ezt a feladatot csak a trigonometriai addíciós tételek megtanítása után érdemes bemutatni, hiszen szükséges hozzá a háromszög szögei között fennálló $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma$ összefüggés. Ebből következik, most már a számtani és mértani középérték összefüggését felhasználva a $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma \ge 3\sqrt{3}$.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr.Gyapjas, F-né, Hack, F., dr.Kántor, S-né & dr. Korányi, E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Szikszai, J. (1987): *A hatványközepek*; Budapest: Tankönyvkiadó.

6.4. Szélsőérték-feladatok megoldása különböző módszerekkel

Példa

Egy hosszú ház oldalához téglalap alakú tyúkketrecet építünk úgy, hogy a ketrec egyik oldalát a ház képezze, továbbá, hogy az elkerítendő terület a lehető legnagyobb legyen. A ketrechez 20 m-nyi kerítésanyagot vettünk. Mekkorák legyenek a ketrec oldalai?

Megoldás

Ezt a feladatot többféle módszerrel is megoldhatjuk, a diákcsoport pillanatnyi felkészültségétől függően: függvény-elemzéssel, deriválással és természetesen a középérték-tételek segítségével.

1) Ha ez utóbbit választjuk, akkor figyelembe kell vennünk a $2a + b = 20$ (perem)feltételt, ahol a és b a tervezett ketrec oldalai, s amiből $b = 20 - 2a$ következik. Ennek figyelembe vételével a területre $T = a \cdot b = a \cdot (20 - 2a)$ adódik. Ahhoz, hogy ezt sikerrel közelíthessük felülről a középértékek segítségével, szükségünk van a kifejezés 2-vel történő bővítésére, hiszen csak a konstanssal való korlátozás lehet eredményes a tétel alkalmazása során. Mivel tehát $\sqrt{2a \cdot (20 - 2a)} \le \frac{2a + 20 - 2a}{2} = 10$, ezért $T = a \cdot (20 - 2a) \le 50$, vagyis $T_{max} = 50\,\text{m}^2$, s ezt az értéket fel is veszi, ha $2a = 20 - 2a$, azaz $a = 5,\ b = 10$ méter.
2) Függvényelemzéssel: észre kell vennünk, hogy a $T(a) = a \cdot (20 - 2a)$ olyan másodfokú függvény, amelynek képe fordított állású parabola, zérushelyei pedig a 0 és a 10. Így e parabolának – szimmetriaokok miatt – az $a = 5$ értéknél lesz maximuma.
3) Ha a differenciál-számítás eszközét választjuk, akkor a területfüggvényt érdemesebb a jobban kezelhető $T(a) = 20a - 2a^2$ alakba átírni. Ennek deriváltja $T'(a) = 20 - 4a$. Ez utóbbi függvény zérushelye $a = 5$, a szélsőérték jellegéről pedig táblázattal, vagy a második derivált előjelének vizsgálatával győződhetünk meg: $T''(5) = -4 < 0$, tehát $a = 5$-ben a T-nek maximuma van.

Hasonlóan, többféle módszerrel is megoldható a következő feladat.

Példa

Egy nagy étterem előfizetéses ebédeltetést szervez. Jelenleg 400 előfizetőjük van és egy ebédet 800 Ft-ért adnak. Megfigyelték, hogy minden alkalommal, ha az ebéd árát 50 Ft-tal megemelik, 20 vendég lemond az előfizetéses ebédről. Mennyi legyen az ebéd ára, hogy maximális legyen az étterem ebből származó bevétele?

Megoldás

A feladat modellezése ebben az esetben nagyobb gondot okozhat a diákok számára, mint az előzőben, hiszen itt nem látható a peremfeltétel. Rá kell vezetnünk őket, hogy most nincs is erre szükség, hiszen x-szel jelölve az emelés mértékét, a bevételfüggvény közvetlenül is felírható:

$B(x) = (400 - 20x)(800 + 50x),\ x \in N$.

A függvény szélsőértéke ugyanúgy háromféle módszerrel számítható, mint az előző esetben.

1) A középértékekkel történő megoldás esetén most a következő átalakítást célszerű megtenni: $B(x) = \frac{2}{5}(1000 - 50x)(800 + 50x)$. Így már gond nélkül korlátozható a kifejezésünk felülről a számtani középpel: $B(x) \le \frac{2}{5}\left(\frac{1000 - 50x + 800 + 50x}{2}\right)^2 = 324.000$, és ezt az értéket fel is veszi, ha $x = 2$, azaz, ha 100 Ft-tal emelik az étkezés árát.

2) A függvénytani megoldásokhoz ki kell terjesztenünk a függvényt legalább a pozitív valós számok halmazára,

a $B_1(x) = (400 - 20x)(800 + 50x),\ x \in R$

függvény ugyanis már gond nélkül vizsgálható, deriválható, és ráadásul a szélsőértékhelyként adódó $x = 2$ érték benne van az eredeti függvény értelmezési tartományában is.

Ritkábban, de arra is találunk példát, hogy az egyéb középértékek közötti összefüggéseket is jól használhatjuk szélsőérték-feladatok megoldására.

Példa

Vizsgáljuk a 48 cm-es testátlójú téglatesteket. Mekkorák ezek közül annak az élei, amelynek a legnagyobb a térfogata?

Megoldás

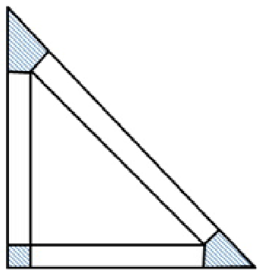
Ha a téglatest éleit a,b,c jelöli, akkor a d testátlóra $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ adódik. Ez adhatja az ötletet, hogy megvizsgáljuk a négyzetes és a mértani közép felhasználhatóságát a megoldás során. Valóban, a

$$V = abc = \left(\sqrt[3]{abc}\right)^3 \leq \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}\right)^3 = 64$$

átalakítás mutatja, hogy a térfogat felülről korlátozható, s ezt a felső korlátot fel is veszi a térfogat, ha a téglatest minden éle egyenlő, azaz – nem meglepő módon – ha olyan kockáról van szó, aminek élei 4 cm-esek.

Példa

Egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú lemezből ugyanilyen alapú dobozt készítünk azonos magasságú oldallapokkal, a színezett részek kivágásával (*12. ábra*). Milyen magasság mellett lesz a doboz térfogata maximális?



12. ábra

Megoldás

1) Jelölje a befogó hosszát a, a felhajtandó magasságot x. Ekkor a térfogatra $V = \dfrac{\left(a - x \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)\right)^2 \cdot x}{2}$ adódik. Észrevehetjük, hogy itt megfelelő bővítés mellett a három elem mértani és számtani középértékére vonatkozó összefüggést használhatjuk:

$$\sqrt[3]{\left(a - x\left(2 + \sqrt{2}\right)\right)^2 \cdot 2x\left(2 + \sqrt{2}\right)} \leq \frac{a - x\left(2 + \sqrt{2}\right) + a - x\left(2 + \sqrt{2}\right) + 2x\left(2 + \sqrt{2}\right)}{3} = \frac{a}{3},$$

így $V \leq \dfrac{a^3}{54\left(2 + \sqrt{2}\right)}$, azaz $V_{\max} = \dfrac{a^3\left(2 - \sqrt{2}\right)}{27}$.

Ezt a maximumot úgy érhetjük el, ha

$$a - x\left(2+\sqrt{2}\right) = 2x\left(2+\sqrt{2}\right), \text{ azaz } x = \frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{6}.$$

2) Természetesen ezt a feladatot is megoldhatjuk a differenciál-számítás eszközeivel. A térfogatfüggvény deriválása nem könnyű feladat a diákok számára, hiszen amellett, hogy szorzatfüggvényt kell deriválniuk, még összetett függvénnyel is találkozhatnak az első szorzótényező jóvoltából. A térfogat derivált-függvénye:

$$V' = \left(\frac{\left(a - x\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^2 \cdot x}{2}\right)' = \frac{2\left(a - x\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\cdot\left(-2-\sqrt{2}\right)\cdot x + \left(a - x\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^2}{2}.$$

E függvény két lehetséges zérushelye $x_1 = \dfrac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$ és $x_2 = \dfrac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{6}$.

Kis számolással belátható, hogy az x_1 megvalósítása esetén nullmértékű lenne a dobozunk alaplapja, így elegendő a második zérushely vizsgálatára koncentrálnunk. A V' függvény szorzattá alakítása nemcsak a zérushelyek megállapítása miatt fontos, hanem azért is, mert így a második deriváltat is könnyebben állapíthatjuk meg. Mivel

$$V' = \frac{\left(a - x\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\left(a - x\cdot\left(6+3\sqrt{2}\right)\right)}{2}, \text{ így}$$

$$V'' = a\cdot\left(-4-2\sqrt{2}\right) + x\cdot\left(18+12\sqrt{2}\right), \text{ azaz } V''\left(\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{6}\right) = -a\cdot\left(2+\sqrt{2}\right) < 0,$$

ami azt jelenti, hogy az x_2 valóban maximumhelye a térfogatfüggvénynek.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy ha α hegyesszög, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3+2\sqrt{2}$. Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás

Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy az α tetszőleges hegyesszög lehet, hiszen hegyesszögek esetén $\sin\alpha \neq 0$ és $\cos\alpha \neq 0$ teljesül. Elvégezve a baloldalon a beszorzást, adódik az

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2+2\sqrt{2}$$

bizonyítandó egyenlőtlenség. Ha a baloldalon közös nevezőre hozunk, akkor a

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2+2\sqrt{2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ha most megpróbáljuk csökkenteni a baloldali törtet, akkor eszünkbe juthat a számtani és a mértani középértékek között fennálló egyenlőtlenség. Mivel α hegyesszög, így gond nélkül alkalmazható a

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

összefüggés, amiből feladatunkra a

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq\frac{2\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

következik. Ez utóbbi átalakítás nyomán most már elegendő a

$$\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}+\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq 2+2\sqrt{2}$$

egyenlőtlenség teljesülését vizsgálni. Ehhez előbb ismerjük fel, hogy

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha$ és ebből – például az

$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ függvény értékkészletét vizsgálva – adódik a

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha\leq\frac{1}{2}$, továbbá a $\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ összefüggés.

Hivatkozva a

$$g(x)=\frac{1}{x},\quad x>0$$

függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságára innen az

$\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\geq 2$, és az $\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}\geq\sqrt{2}$ következik.

Ebből láthatóan a baloldal valóban alulról korlátozható a $2+2\sqrt{2}$ értékkel. Ezt a minimumértéket jól ellenőrizhető módon valóban fel is veszi a kifejezés,

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ esetén.

Példa

Határozzuk meg a

$K(x, y) = \left(2\sqrt{3}\cos(x-y) + 2\sin(x-y)\right)\cdot\left(10\cos(x+y)+5\right)$

kifejezés maximumát! Milyen (x, y) számpárok esetén veszi fel a kifejezés ezt a maximumot?

Megoldás

Észrevehetjük, hogy normálással, illetve a $\sin(\alpha+\beta)$-ra vonatkozó addíciós tétel segítségével a $K_1(x, y)$-nal jelölhető első tényező átalakítható:

$$K_1(x, y) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)\right) \text{ miatt}$$

$$K_1(x, y) = 4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos(x-y) + \cos\frac{\pi}{3}\sin(x-y)\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} + x - y\right).$$

Így az első kifejezés felső korlátja 4, míg a második tényezőé 15. Így $K(x, y) \le 4\cdot 15 = 60$. meg kell vizsgálnunk, hogy ez tényleg maximum-e!

Ehhez oldjuk meg a $\left.\begin{array}{r}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x - y\right) = 1\\ \cos(x+y) = 1\end{array}\right\}$ egyenletrendszert.

Az első egyenletből $x - y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, míg a másodikból $x + y = 2l\pi$ adódik. Figyelmeztetnünk kell a diákokat, hogy itt mindenképpen külön mozgó egész számokról van szó, így különböző betűkkel kell jelölnünk ezeket. Ebből összeadással és visszahelyettesítéssel adódik a megoldás:

$$M = \left\{\left(\frac{\pi}{12} + m\pi; -\frac{\pi}{12} + (m-2k)\pi\right) \,\middle|\, m, k \in Z\right\}.$$

Példa
Legyen

$$F(x;y)=\log_x\left(2^{\sqrt{2\sin x-\sqrt{2}}+\sqrt{y-tg^2x}}+2^{\sqrt{2\cos x-\sqrt{2}}-\sqrt{y-tg^2x}}\right).$$

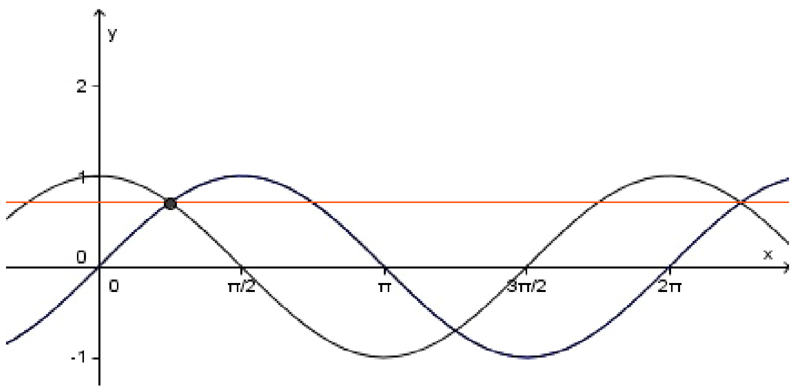
Mely $(x;y)$ valós számpár esetén veszi föl F a maximumát, illetve a minimumát?

Megoldás

Mindenekelőtt a függvény értelmezési tartományát kell meghatározni. Ehhez figyelembe kell vennünk, hogy x egyrészt a logaritmus alapja (így $x>0$, $x\neq 1$), másrészt a kitevőben lévő négyzetgyökös kifejezésekben is szerepel. Az innen adódó

$$\left.\begin{array}{l}\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldásához célszerű segítségül hívni az egységkörös ábrázolást, vagy az adott függvények közös koordinátarendszerben megrajzolt grafikonját (*13. ábra*).



13. ábra

Ha az utóbbit tesszük, az ábrát elemezve megtalálhatjuk az $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z^+ \cup \{0\} \right\}$ feltételt, amelynek segítségével az F a következő alakban írható:

$$F = \log_{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left(2^{\sqrt{y-1}} + 2^{-\sqrt{y-1}}\right)$$

Ebből egyrészt az $y \geq 1$ feltétel következik, másrészt a zárójelben lévő kifejezésről azonnal láthatjuk az $a + \frac{1}{a} \geq 2$ egyenlőtlenség alkalmazhatóságát, hiszen a $2^{\sqrt{y-1}}$ kifejezés értéke minden $y \geq 1$ esetén pozitív. Észre kell azonban azt is vennünk, hogy az $f(a) = \log_{\frac{\pi}{4}+2k\pi} a$ függvény alapja $k = 0$ esetén 1-nél kisebb, tehát f ekkor szigorúan monoton csökkenő, míg ha k pozitív egész, akkor f szigorúan monoton növekvő. Így F-nek $x = \frac{\pi}{4};\ y = 1$ esetén maximuma van, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z^+;\ y = 1$ esetén pedig minimuma. A szélsőérték $F = \log_{\frac{\pi}{4}+2k\pi} 2$.

Példa

Számítsa ki az

$f(x) = \frac{1}{3^{2x} - 2 \cdot 3^{x-1} + 1},\ x \in [-2;0]$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás

Mindenekelőtt érdemes felismernünk, hogy a nevezőben lévő másodfokú kifejezés teljes négyzetté alakítható: $\left(3^x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}$. E kifejezés elemzéséből adódik, hogy zérushelye nincs, hiszen a kifejezés értéke $\geq \frac{8}{9}$, tehát az eredeti f a teljes $[-2;0]$ tartományon értelmezett. Leolvasható továbbá, hogy a nevező minimumhelye $x = -1$, az itt felvett minimum értéke pedig $y = \frac{8}{9}$. Mivel normál állású parabola szerint viselkedik a nevező, így a maximumát az $x = -2$-nél és az $x = 0$-nál felvett függvényértékek összehasonlításával kaphatjuk. Miután az előbbi érték $\frac{76}{81}$, az utóbbi pedig $\frac{4}{3}=\frac{108}{81}$, így az adott tartományon a nevező maximuma $x=0$-nál $\frac{4}{3}$. Mivel az f függvény a fent elemzett nevező reciproka, azaz úgy adódik, hogy egy, az adott tartományon szigorúan monoton csökkenő $\left(\frac{1}{x}\right)$ függvényt érvényesítettünk a nevezőn, így az f szélsőértékei: $f_{\max}=f(-1)=\frac{9}{8}$, illetve $f_{\min}=f(0)=\frac{3}{4}$.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy ha *x,y,z* tetszőleges, 1-nél nagyobb valós számok, továbbá $K(x;y;z)=\log_{xy}\sqrt{xyz^2}\cdot\log_{xz}\sqrt{xy^2z}\cdot\log_{yz}\sqrt{x^2yz}$, akkor $K(x;y;z)\geq 1$ teljesül! Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás

Célszerű áttérni közös, például 10-es alapra. Ekkor a kifejezés – a logaritmus azonosságainak alkalmazása és megfelelő csoportosítás után – a következőképpen alakul:

$$K(x;y;z)=\frac{(\lg x+\lg z)+(\lg y+\lg z)}{2(\lg x+\lg y)}\cdot\frac{(\lg x+\lg y)+(\lg y+\lg z)}{2(\lg x+\lg z)}\cdot\frac{(\lg x+\lg y)+(\lg x+\lg z)}{2(\lg y+\lg z)}$$

Erre már alkalmazhatjuk a számtani és mértani középértékek közötti összefüggést (figyelembe véve a feladat feltételeit). Ekkor például az első szorzótényező esetén teljesül, hogy

$$\frac{(\lg x+\lg z)+(\lg y+\lg z)}{2(\lg x+\lg y)}=\frac{\frac{(\lg x+\lg z)+(\lg y+\lg z)}{2}}{\lg x+\lg y}\geq\frac{\sqrt{(\lg x+\lg z)(\lg y+\lg z)}}{\lg x+\lg y}$$

Mindhárom szorzótényezőt ugyanígy átalakítva a $K(x,y,z)$ kifejezésre adódik, hogy

$$K(x;y;z)\geq\frac{\sqrt{(\lg x+\lg z)(\lg y+\lg z)}}{\lg x+\lg y}\cdot\frac{\sqrt{(\lg x+\lg y)(\lg y+\lg z)}}{\lg x+\lg z}\cdot\frac{\sqrt{(\lg x+\lg y)(\lg x+\lg z)}}{\lg y+\lg z}\geq 1\cdot$$

Egyenlőség – a középértékekre vonatkozó tétel alapján – pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z$ teljesül.

Példa

Legyen $x, y > 0,\ x, y \in R$. Határozzuk meg a következő kifejezés minimumát:

$$K(x,y) = \frac{x^{16}}{y^{16}} + \frac{y^{16}}{x^{16}} - \frac{x^8}{y^8} - \frac{y^8}{x^8} + \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Állapítsuk meg, milyen *x,y* értékeknél veszi fel ezt a minimumot!

Megoldás

Könnyen felismerhető, hogy itt minden bizonnyal az $a + \frac{1}{a} \geq 2$ nevezetes egyenlőtlenséget célszerű alkalmaznunk, de zavarhat minket a néhány negatív előjel. Ezek kiküszöbölésére alakítsunk ki teljes négyzeteket:

$$K(x,y) = \left(\frac{x^8}{y^8} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^8}{x^8} - 1\right)^2 + \frac{x^8}{y^8} + \frac{y^8}{x^8} + \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 4 \cdot$$

Mivel a teljes négyzetek mindegyikére teljesül, hogy ≥ 0, a további összegek mindegyike $a + \frac{1}{a}$ típusú, ezért látható, hogy

$K(x;y) \geq 2 + 2 + 2 - 4 = 2$.

Ezt fel is veszi, hacsak $x = y$, hiszen akkor a teljes négyzetek mindegyike 0 lesz, az $\frac{x^n}{y^n}$, illetve az $\frac{y^n}{x^n}$ típusú törtek értéke pedig egyaránt 1.

Példa

Legyen $a + b + c = 12,\ a, b, c > 0$!

Határozzuk meg a $K(a,b,c) = a \cdot b^2 \cdot c^3$ kifejezés maximumát!

Milyen *a,b,c* értékek mellett veszi fel *K* ezt a maximumot?

Megoldás

Bővítsük a *K* kifejezést a következő módon:

$$K(a,b,c) = \frac{6a \cdot 3b \cdot 3b \cdot 2c \cdot 2c \cdot 2c}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}.$$

Így már eredményesen tudjuk korlátozni *K*-t felülről a megfelelő számtani középpel:

$$K(a,b,c)=\frac{6a\cdot 3b\cdot 3b\cdot 2c\cdot 2c\cdot 2c}{6\cdot 3^2\cdot 2^3}\le\frac{\left(\frac{6a+3b+3b+2c+2c+2c}{6}\right)^6}{432}=\frac{12^6}{432}=6912\cdot$$

Ezt az értéket fel is veszi, ha $6a=3b=2c$, azaz, ha $a=2$, $b=4$, $c=6$.

Példa

Legyen $x,y\in[0;12]$, továbbá $x\cdot y=(12-x)^2(12-y)^2$!

Határozzuk meg a $K(x,y)=x\cdot y$ kifejezés maximumát!

Megjegyzés

Miután a feltétel miatt $12-x>0$ és $12-y>0$ is teljesül, így az egyenlet mindkét oldalából négyzetgyököt vonva a $\sqrt{xy}=(12-x)(12-y)$ alakú egyenlethez jutunk. Korlátozzuk ennek bal oldalát felülről:

$$(12-x)(12-y)\le\left(\frac{12-x+12-y}{2}\right)^2=\left(12-\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Ekkor ismét alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\left(12-\frac{x+y}{2}\right)^2\le\left(12-\sqrt{xy}\right)^2.$$

Ezzel a következő, $a=\sqrt{xy}$ -ban másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk: $\sqrt{xy}\le\left(12-\sqrt{xy}\right)^2$.

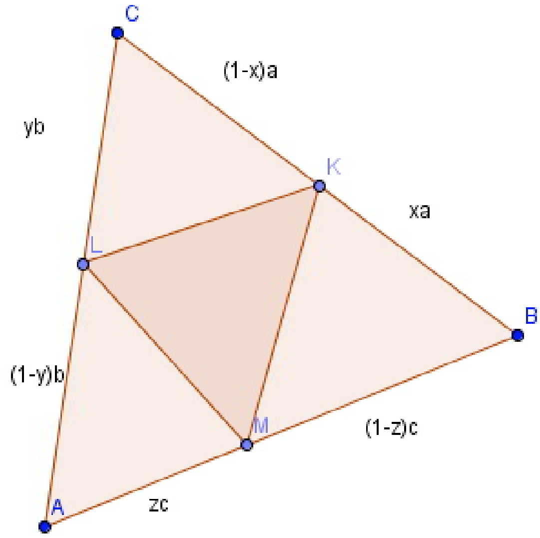
Kibontva és átrendezve adódik az $a^2-25a+144\ge 0$ egyenlőtlenség, amelynek megoldása $a\ge 16$ vagy $a\le 9$. Mivel $a=\sqrt{xy}\le 12$ a feltétel miatt, így csupán a második egyenlőtlenség vehető számításba. Ebből tehát $\sqrt{xy}\le 9$, továbbá a középértékek tételének alkalmazása miatt az $x=y$ feltétel is kell, hogy teljesüljön. Mindebből adódik az $x=y=9$ megoldás.

Példa

Az *ABC* háromszög *AB*, *BC*, *CA* oldalán vegyük fel rendre a tetszés szerinti, de a csúcsoktól különböző *M,K,L* pontokat! Bizonyítsuk be, hogy az *MAL*, *KBM*, *LCK* háromszögek közül legalább az egyiknek a területe nem nagyobb az *ABC* háromszög területének a negyedénél!

Megoldás

Jelöljük a háromszög oldalain keletkezett szakaszokat a *14. ábrának* megfelelően!



24. ábra

Ekkor $T_{AML} = \frac{zc(1-y)b\sin\alpha}{2} = z(1-y)T$, $T_{BKM} = \frac{xa(1-z)c\sin\beta}{2} = x(1-z)T$, továbbá $T_{CKL} = \frac{yb(1-x)a\sin\gamma}{2} = y(1-x)T$, ahol T az ABC háromszög területe. E három terület szorzatára a számtani és mértani középértékekre vonatkozó tétel alapján

$$T_{AML}T_{BKM}T_{CKL} = x(1-x)y(1-y)z(1-z)T^3 \le \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2\left(\frac{y+1-y}{2}\right)^2\left(\frac{z+1-z}{2}\right)T^3 = \frac{1}{64}T^3.$$

Ebből már következik a feladat állítása, hiszen ha mindhárom terület nagyobb lenne $\frac{1}{4}T$ -nél, akkor a szorzatukra éppen ellenkező irányú egyenlőtlenség teljesülne.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr.Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi, E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

6.5. Algebrai és függvénytani eszközök kombinálása egyenlőtlenségek megoldásában

A függvények tulajdonságainak ismerete rendkívül hasznos lehet algebrai jellegű feladatok, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során. Erre mutatunk néhány példát a teljesség igénye nélkül.

Példa

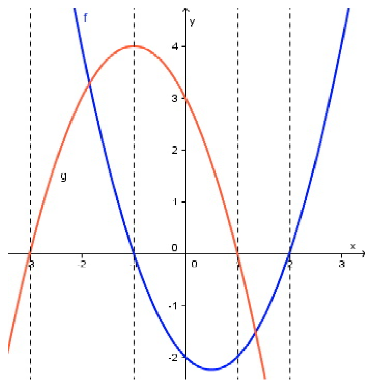
Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\frac{x^2 - x - 2}{3 - 2x - x^2} \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Mindenekelőtt tisztáznunk kell a feladatban szereplő kifejezés értelmezési tartományát. Ehhez meg kell oldanunk a $3 - 2x - x^2 = 0$ egyenletet. Mivel ennek megoldásai $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, így $D = R \setminus \{1; -3\}$. Eredményünket felhasználva a nevezőt szorzat-alakban felírhatjuk, és megállapíthatjuk, hogy olyan fordított állású parabola e kifejezés képe, amelynek zérushelyei 1 és -3 $(g(x) = (1 - x)(x + 3))$.

Hasonlóan a számlálóban lévő kifejezésről is elmondható, hogy képe normál állású parabola, -1 és 2 zérushelyekkel $(f(x) = (x + 1)(x - 2))$. Az egyenlőtlenség tehát így is írható: $\frac{(x + 1)(x - 2)}{(1 - x)(x + 3)} \geq 0$.

Másrészt látható, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a számláló és a nevező azonos előjelű (vagy ha a számláló 0). A közös koordinátarendszerben történő ábrázolás megkönnyíti a megoldást *(15. ábra)*.



15. ábra

Az ábráról könnyen leolvasható, hogy mindkét függvény pozitív -3 és -1 között, illetve mindkettő negatív 1 és 2 között. A feltételeket is figyelembe véve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát:

$M =]-3; -1] \cup]1; 2]$.

Irracionális egyenlőtlenségek megoldása során is alkalmaznunk érdemes a másodfokú függvényekre vonatkozó ismereteinket.

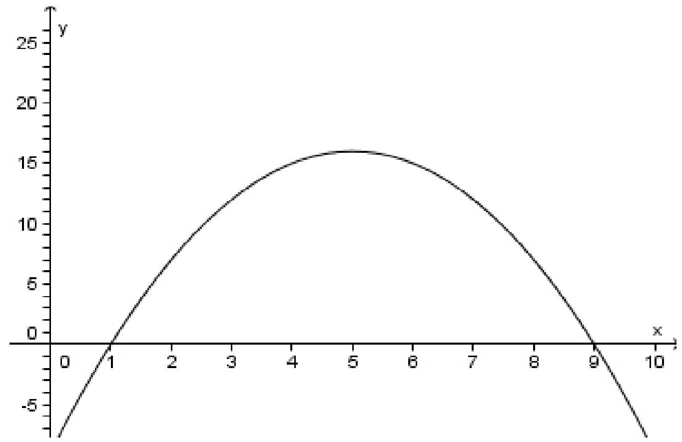
Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$x^2 - 10x + 3 + 5 \cdot \sqrt{(1-x)(x-9)} < 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Természetesen ebben az esetben is az értelmezési tartomány meghatározásával kell kezdenünk. Felismertetjük, hogy a négyzetgyök alatti kifejezés képe fordított állású parabola, amelynek zérushelyei (1 és 9) a szorzat-alakból könnyen meghatározhatók. Azonnal érdemes fel is rajzoltatni ezt a parabolát, hogy az ábra is segítse további munkánkat *(16. ábra)*. Az ábrázolás során a GeoGebrában is élhetünk az *x* :*y* beosztás-arány megváltoztatásának lehetőségével, hiszen csak a függvény jellege és zérushelyei a fontosak számunkra.



16. ábra

Tovább vizsgálva az egyenlőtlenséget, felismerhetjük a négyzetgyök alatti és a négyzetgyökön kívüli másodfokú polinom szerkezeti hasonlóságát. Így célszerűnek látszik bevezetni az $a = \sqrt{-x^2 + 10x - 9}$ új ismeretlen, amivel egyenlőtlenségünk a következő alakú lesz: $-a^2+5a-6<0$. A másodfokú egyenletek megoldásában, illetve a Viète-formulák használatában jártas diákok azonnal látják az $a_1=2$ és $a_2=3$ zérushelyeket, fel tudják vázolni az újabb fordított állású parabolát és le tudják olvasni az $a<2$ vagy $a>3$ részmegoldást.

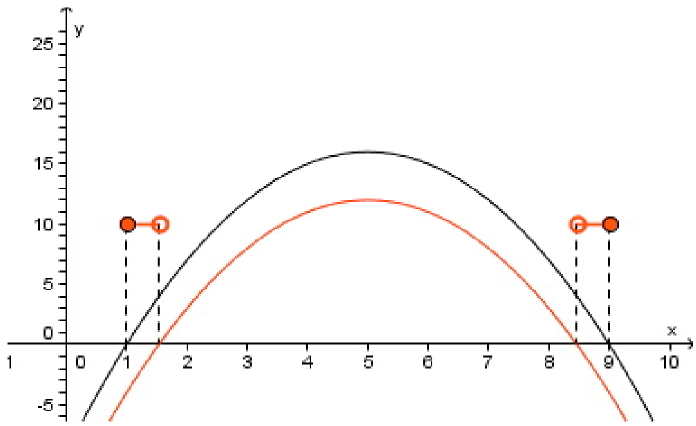
A továbbiakban tehát meg kell oldanunk a

$\sqrt{-x^2+10x-9}<2$, illetve a $\sqrt{-x^2+10x-9}>3$

egyenlőtlenségeket. Miután az egyenlőtlenségek mindkét oldalán nemnegatív számok szerepelnek, így mindkettőben elvégezhetjük a négyzetre emelést. Az első egyenlőtlenség így $-x^2+10x-13<0$ alakú lesz. Mielőtt ezt is megoldanánk, illetve ábrázoltatnánk, érdemes felismertetni, hogy a korábban vizsgált $f_1(x)=-x^2+10x-9$ függvényen végrehajtott értéktranszformációval, az y tengely mentén -4 egységgel való eltolással származtatható az egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú kifejezés, így zérushelyei (ha lesznek) biztosan az 1 és a 9 értékek közé esnek majd. Az ábrázolás természetesen igazolja elképzelésünket, de az $x_{1,2}=5\pm2\sqrt{3}$ zérushelyekről számolással is megállapíthatjuk nagyságrendjüket, ha éppen ezt a feladattípust is gyakoroltatni akarjuk.

A függvények közös koordináta-rendszerben történő ábrázolása után *(17. ábra)* leolvashatjuk a feladat részmegoldását:

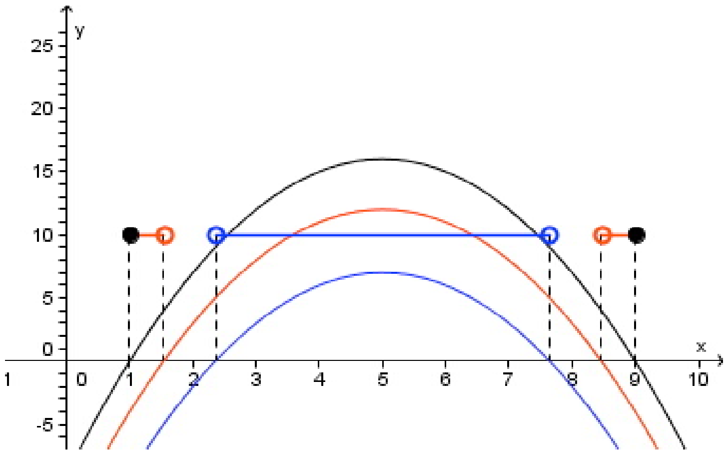
$M_1=\left[1;5-2\sqrt{3}\right[\cup\left]5+2\sqrt{3};9\right]$



17. ábra

A másik egyenlőtlenség megoldása hasonlóan adódhat. Itt a $-x^2+10x-18>0$ egyenlőtlenségre jutunk. Felismertetjük, hogy a bal oldalon álló másodfokú kifejezés szintén az $f_1(x)=-x^2+10x-9$ függvény y tengely mentén történő eltolásával adódik, csak itt -9 egységgel kell ezt megtennünk. A megfelelő ábrát elkészítve leolvasható az $M_2=\left]5-\sqrt{7};5+\sqrt{7}\right[$ (rész) megoldáshalmaz. E két halmaz egyesítése adja a feladat végső megoldását:

$M=M_1\cup M_2=\left[1;5-2\sqrt{3}\right[\cup\left]5-\sqrt{7};5+\sqrt{7}\right[\cup\left]5+2\sqrt{3};9\right]$ *(18. ábra).*



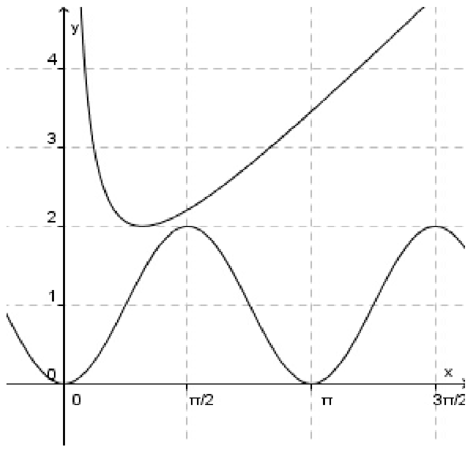
18. ábra

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $2\sin^2(2x+y)\geq 3^{x-\pi}+3^{\pi-x}$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

A megoldáshoz a függvények értékkészletének vizsgálata vezethet. A bal oldali kifejezés esetén $0\leq 2\sin^2(2x+y)\leq 2$ teljesül. A jobb oldalon $a+\dfrac{1}{a}$ alakú kifejezést vehetünk észre, és mivel tudjuk, hogy a $f(x)=3^{x-\pi}$ függvény értékkészlete a pozitív számok halmaza, így az $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ egyenlőtlenség alkalmazásával belátjuk, hogy a jobb oldal értékkészlete a $[2;\infty[$ intervallum. Így az egyenlőtlenségből csupán az egyenlőség állhat fenn. Mindezt a két függvény közös koordináta-rendszerben való felrajzolásával is szemléltethetjük *(19. ábra)*.



19. ábra

A megoldás ezek után könnyen adódik. Emlékeztetjük a diákokat a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján arra, hogy a jobb oldalon $3^{x-\pi}=1$ következik, amiből $x=\pi$ adódik. Ezt behelyettesítve a bal oldali kifejezésbe, a $2\sin^2(2\pi+y)=2$ egyenlet megoldása lesz a feladatunk. Felismertetve, hogy a bal oldalon álló függvény π-periodikus, elegendő megoldanunk a $\sin^2 y=1$ egyenletet. Így az egyenlet megoldásai a $\left(\pi;\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$ alakú számpárok, ahol $k\in Z$.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+3}{x+2}+1}<2$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Az értelmezési tartomány megadásához mindenekelőtt meg kell oldanunk az $\frac{x+3}{x+2}>0$ egyenlőtlenséget. Ez alkalmat adhat számunkra, hogy felidéztethessük a racionális törtfüggvények ábrázolását.

Az $\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{1}{x+2}+1$ átalakítás elvégzése után könnyen tudjuk a hiperbolát ábrázolni, melynek aszimptotái az x = -2 és az y = 1 egyenesek. A másik, négyzetgyökvonás miatti feltételünk a

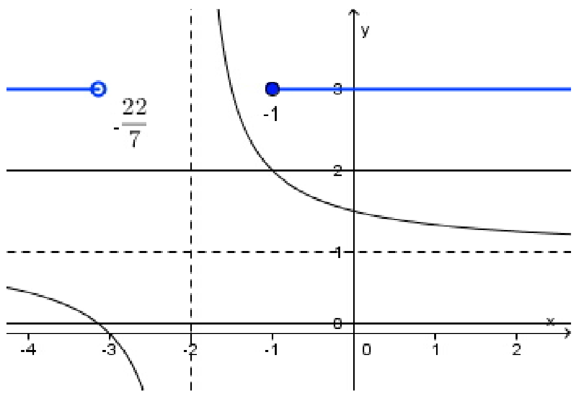
$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+3}{x+2}+1\geq 0,$$

amiből átrendezéssel és az $\log_{\frac{1}{2}} x$ (vagy inkább az $\left(\frac{1}{2}\right)^x$) függvény

szigorúan monoton csökkenő voltára történő hivatkozással adódik az $\dfrac{x+3}{x+2}\leq 2$ egyenlőtlenség. Az ábrázolás itt is segít az értelmezési tartomány meghatározásában $\left(D=\left]-\infty;-3\right[\cup\left[-1;\infty\right[\right)$.

Az egyenlőtlenség megoldásához négyzetre kell emelnünk mindkét oldalt (ezt szabad megtennünk, hiszen mindkettő nemnegatív). Átrendezés és a szigorúan monoton csökkenésre történő újbóli hivatkozás után az $\dfrac{x+3}{x+2}>\dfrac{1}{8}$ egyenlőtlenség adódik. Ennek megoldásához ismét feltudjuk használni ábránkat, bár a metszéspont meghatározása algebrai eszközökkel kell, hogy történjen. A feladat megoldása tehát az

$M=\left]-\infty;-\dfrac{22}{7}\right[\cup\left[-1;\infty\right[$ számhalmaz *(20. ábra)*.



20. ábra

Számos hasonló feladattal találkozhatunk a feladatgyűjtemények, tankönyvek lapjain, jó részük természetesen egyszerűbb az itt bemutatottaknál. Bármilyen nehézségű is a feladat, a függvénytani alapú szemléltetés eszközét gyakran érdemes alkalmazni, hiszen jelentősen megkönnyítheti a feladatmegoldást és a megértést.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi,E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Vigné Lencsés, Á. (1997): *Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása függvénytani alapon.* Szeged: Mozaik.

6.6. A határérték- és differenciálszámítás tanításának kérdései

A határérték- és differenciál-számítás az emelt szintű érettségi követelményrendszerében található, így azokban a csoportokban érdemes foglalkoznunk vele, ahol emelt szintű érettségire készítünk fel, illetve ahol emelt óraszámban oktatjuk a tárgyat abban a reményben, hogy a diákok egy része eljut az emelt szinten történő érettségizés gondolatáig.

Akár órakeretben, akár délutáni fakultáción dolgozzuk fel a témakört, mindenekelőtt meg kell találnunk a helyét a tanmenetünkben. Tapasztalataink szerint az iskolák, illetve a kollégák egyik része e tekintetben azt az utat választja, hogy mind a differenciál-, mind az integrálszámítás témakörét az utolsó utáni pillanatra, a 12. évfolyam második félévére hagyja, mondván, hogy ezek úgysem illeszkednek szorosan a többi témakörhöz, inkább a felsőfokú tanulmányokat készítik elő, így elegendő akkor foglalkoznunk velük. Ennek az elgondolásnak az a hátulütője, hogy az érettségi közeledtével ezt a két fontos témakört hajlamosak vagyunk elnagyolni, nincsen ideje e nehéz tananyagnak bevésődnie, illetve a diákok könnyen összekeverik a deriválás és az integrálás műveletét, ha közvetlenül egymás után tárgyaljuk ezeket.

Az általunk követendőnek tartott sorrend a következő: a 11. évfolyam első félévében, egy bőséges függvénytani ismétlés után foglalkozzunk a függvény határértékének bevezetésével, hogy aztán ezt felhasználva tudjuk definiálni a differenciál-hányadost, illetve tárgyalni a differenciálszámítás elemeit. Ez a mód különösen célszerű azokban a fakultációs csoportokban, ahol a diákok az adott évfolyam különböző osztályaiba járnak, s esetleg mindössze a fakultáció óráin találkoznak az adott tanárral: így ugyanis a függvénytani ismétlés során egyrészt képet kaphatunk a diákok felkészültségéről, „szintre hozhatjuk” azt, másrészt az egyes kollégák által addigra sajnos gyakran összehozott tantervi csúszásokat is kiegyenlíthetjük, „bevárva” a késésben lévő csoportok diákjait a következő témakör kezdetéig. Persze ennek a sorrendnek is megvannak a hiányosságai: az exponenciális és a logaritmus-függvény határértékeivel, differenciál-hányadosával csak később, ezek definiálása után tudunk foglalkozni, mint ahogyan a görbe adott pontbeli érintőjének meghatározásáról is a továbbiakban, a koordináta-geometria témakörén belül kell, hogy említést tegyünk. A sorozat határértékét a sorozatok általános tárgyalása során, a 11. évfolyam végén, illetve a 12. évfolyam elején érdemes definiálni, míg az integrálszámítást a térfogatszámítás környékén, a 12. évfolyam első felében.

Ha a fentiek szellemében járunk el, akkor a függvénytani ismétlés során, az alapfüggvények tulajdonságainak tárgyalásakor már érdemes utalnunk a végtelenben vett határérték szemléletes jelentésére (például a másodfokú, illetve az exponenciális függvény kapcsán), továbbá a véges helyen vett végtelen határértékre (a racionális törtfüggvény felidézésekor).

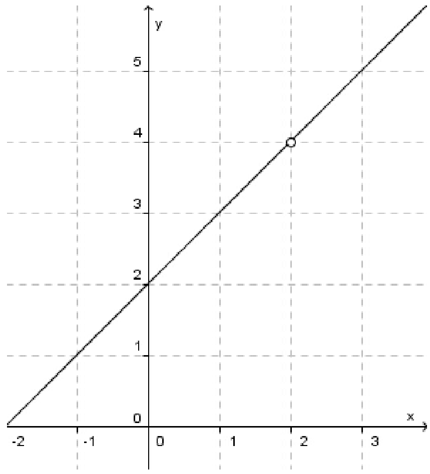
A legfontosabb újdonságot, a véges helyen vett véges határérték tárgyalását is megalapozhatjuk a speciális függvények (előjel, egészrész, törtrész) ismétlésekor, mégis célszerű egy-két egyszerű példával bevezetni a fogalmat.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük a lehető legbővebb számhalmazon értelmezett, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

Megjegyzés

A diákok hamar észre kell, hogy vegyék a nevező miatt fennálló $x \neq 2$ feltételt, azaz azt, hogy az értelmezési tartomány $D_f = R \setminus \{2\}$. Ha az ábrázolásra kerül a sor, akkor viszont először nem ismerik fel, hogyan lehetne célszerűen szemléltetni a szakadást a függvénygörbén. Nem segít ebben a GeoGebra program sem, mert bár az *f* függvényt ábrázolva az alakzat (2; 4) pontjára kiírja, hogy „nem definiált”, ez a folytonossági hiány mégsem látható a görbén. Így ha mégis e programmal akarjuk szemléltetni függvényünket, egy kis „kegyes csaláshoz” érdemes folyamodnunk: az egyszerűsítés után adódó $f_1(x)=x+2$ függvényt kell ábrázolnunk, s ezen jelöljük meg a (2; 4) pontot (*21. ábra*).



21. ábra

A függvény további jellemzése már könnyebben mehet, bár az értékkészlet felismerésében némelyik diák segítségre szorulhat $\left(R_f = R \setminus \{4\}\right)$.

Ezen előkészítés – illetve további, hasonlóan egyszerű példák – után érdemes pontosan kimondani a véges helyen vett véges határérték fogalmát.

Definíció

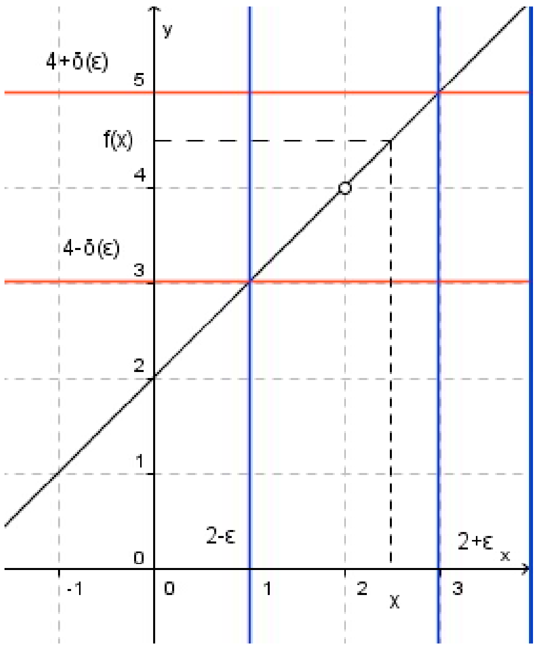
Az f függvénynek az $x_0 \in R$ helyen létezik (véges) *határértéke* és ez $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in R$,

ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in \left]x_0 - \delta(\varepsilon); x_0 + \delta(\varepsilon)\right[\cap D_f$

esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$ teljesül.

A fenti definíció a középiskolások számára természetesen nagyon nehezen érthető, mégis érdemes így tárgyalni a határértéket, hiszen ezzel a diákok ízelítőt kaphatnak az egyetemi szintű matematika rejtelmeiből. Másrészt itt és ekkor megadhatjuk nekik azt a szemléltetést, amiről e definíció kapcsán az egyetemeken oktató kollégák gyakran elfeledkeznek, s így előre helyes képet alakíthatunk ki diákjainkban e fogalomról.

Ez utóbbit segítheti, ha például animált ábrát készítünk a GeoGebrában a definícióval kapcsolatban (*22. ábra*).



22. ábra

A programban beállítjuk az e változó értékét, majd a tőle függő $x = 2 - e,\ x = 2 + e$ egyeneseket ábrázoljuk. Ezeknek az $f_1(x) = x + 2$-vel meghatározott metszéspontjain át merőlegest állítunk az y tengelyre (ezek lesznek a $4 + e,\ 4 - e$ egyenesek a példánkban). Ha például megjelöljük az $x = 2 + \frac{e}{2}$ egyenest, illetve az ehhez az x értékhez tartozó függvényérték egyenesét az ábránkon (szaggatott vonallal), és eltüntetjük a felesleges vonalakat és pontokat, akkor a csúszka beállításával (például 0.01-től 1-ig, 0.01 lépésközzel) kezdhetjük is az ábra animálását.

A véges helyen vett végtelen, illetve a végtelenben tekintett véges, továbbá végtelen határérték pontos definícióját is megadhatjuk, de ha úgy döntünk, hogy ezekkel kapcsolatban elegendő a helyes szemlélet kialakítása, akkor bőséges példaanyagon keresztül, az ismert alapfüggvények felidézésével is tárgyalhatjuk ezeket. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény kapcsán érdemes kitekintenünk a jobb-, illetve baloldali határérték fogalma felé is.

A határérték-számítási típusfeladatok közül az alábbival érdemes részletesebben foglalkoznunk.

Példa

Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+4x-3}{2x^2-14x+24}$ határértéket!

Megjegyzés
A diákok jelentős része nehezen tudja előállítani, illetve kezelni a másodfokú egyenletek, kifejezések gyöktényezős alakját, emiatt is fontos az ilyen jellegű feladatok kitűzése. A számlálóban és a nevezőben található kifejezések zérushelyének megállapítása után a szorzatalakot kell előállítanunk, majd az egyszerűsítés és behelyettesítés után adódik a végeredmény $\left(\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+4x-3}{2x^2-14x+24}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-1)(x-3)}{2(x-4)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x+1}{2x-8}=1\right)$.

Ha van elég időnk, a függvény ábrázolását, jellemzését is célszerű elvégeztetnünk.

A határérték fogalmának elmélyítése után bevezetjük a differencia-, továbbá a differenciál-hányados fogalmát. A definíciót ábrákkal, illetve fizikai példákkal is érdemes szemléltetni, illetve utalnunk érdemes a később tanulandó koordináta-geometriai vonatkozásokra is.

Az alapderiváltak és a deriválási szabályok alapos begyakoroltatása után két feladattípusra kell koncentrálnunk: a törtes, valamint harmad- és negyedfokú függvények teljes vizsgálatára, továbbá a szöveges szélsőérték-feladatok megoldására.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $x\in R$ függvényt!

Megjegyzés
Azért érdemes éppen ezt a függvényt nagyító alá vennünk, mert észrevetethetjük, hogy a korábban, a nevezetes középértékek tárgyalása során megismert azonosságok függvény-alakjáról van tulajdonképpen szó $\left(a+\dfrac{1}{a}\ge 2,\text{ ha } a>0,\text{ illetve } a+\dfrac{1}{a}\le -2,\text{ ha } a<0\right)$.

Az ábrázolás segít vizuálisan is rögzíteni ezeket a sokszor és jól használható egyenlőtlenségeket.

Példa

A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?

b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

Megjegyzés

A fenti feladat a 2011. májusi emelt szintű érettségi egyik választható példája. Azért érdemel külön figyelmet, mert a b.) részben a

$$K(x) = 2500x + \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}, \; x \in N^+$$

függvény szélsőértékét kell meghatározni. Ha ezt a derivált vizsgálatával szeretnénk megtenni, akkor mindenekelőtt ki kell terjesztenünk a függvényt a pozitív valós számok halmazára. Az így kiterjesztett függvény már differenciálható, minimuma az $x = 48$ helyen van. Mivel ez természetes szám, így az eredeti függvénynek is itt van a minimuma.

A koordináta-geometria tárgyalása során mindenképpen ki kell térnünk a görbe adott pontbeli érintőjének meghatározására, illetve fel kell elevenítenünk azt, hogy ezen érintő meredeksége a függvény adott pontbeli differenciál-hányadosával egyezik meg.

Később, a sorozatok témakörében ismét vissza kell térnünk a határérték fogalmára. Itt is célszerű a definíciót pontosan kimondanunk és szemléltetnünk.

Definíció

Az a_n sorozat konvergens, és határértéke az $A \in R$ szám, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, N(\varepsilon) \in N^+$ küszöbindex, hogy $\forall\, n > N(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.

Megjegyzés

Ez a definíció sem könnyű, így a szemléltetés és a bőséges példaanyag most is rendkívül fontos. A határértékkel kapcsolatos tételek kimondása mellett hasznos egy-egy esetben a konkrét pozitív ε-hoz tartozó küszöbindex megadása is.

Példa

Határozza meg az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$, $n \in N^+$ sorozat határértékét, majd adja meg az $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$-hoz tartozó küszöbindex értékét!

Megoldás

A határérték kiszámításához alakítsuk át a kifejezésünket:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

A küszöbindex kiszámításához a definíciót használjuk:

a $\left|\dfrac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \dfrac{1}{100}$ egyenlőtlenség megoldása $n > 299$,

így az $N\left(\dfrac{1}{100}\right) = 299$ megfelelő választás.

A sorozatok mellett a sorok konvergenciájáról is említést kell tennünk. A geometriai jellegű példákon kívül ekkor a végtelen, nem szakaszos tizedes törtek kezelését is napirendre tűzzük.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy az $x = 0{,}\dot{1}\dot{5}$ szám racionális!

Megjegyzés

A 9. évfolyamon már megismert átírási módszer felidézése mellett felismertetjük, hogy a $q = \dfrac{1}{100}$ kvóciensű, $a_1 = \dfrac{15}{100}$ kezdeti értékű mértani sor összegét kell meghatároznunk. Behelyettesítve:

$$x = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{15}{99}.$$

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi,E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Feladatsorok az emelt szintű írásbeli érettségi vizsgákon: http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (2015.02.25.)

6.7. Az integrálszámítás bevezetése

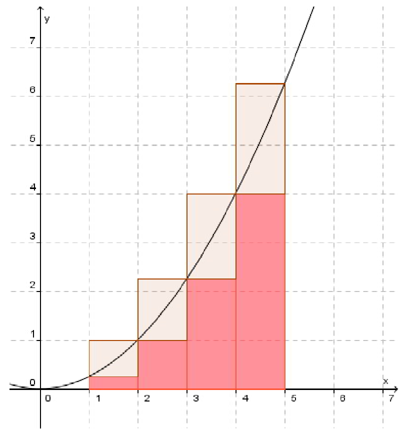
A differenciál-számításhoz hasonlóan az integrálszámítás helye sincs pontosan kijelölve a középiskolai tanulmányok sorában. Ugyanakkor minden körülmény amellett szól, hogy a 12. évfolyamon, a sorozatok tárgyalása után, a térgeometriai fejezet környékén találjuk meg e témakör helyét.

Az egyik lehetséges, logikus rend szerint a területszámítási fejezethez kapcsolhatjuk, hiszen a kör részei területének felidézése után egyenesen következhet a függvényekkel határolt görbe vonalú alakzatok területének kiszámítása. Ha ide illesztjük az integrálszámítást, akkor már csak az a dilemmánk adódhat, hogy a forgástestek térfogatszámítását is itt alapozzuk-e meg, vagy szakítsuk azt ki e fejezetből, és majd a térgeometria tárgyalásakor térjünk rá vissza. Álláspontunk szerint hasznosabb, ha egységesen kezeljük az integrálszámítási ismeretek átadását, beleértve a forgáshenger, forgáskúp, csonkakúp és gömb térfogatának kiszámítását, s később visszautalunk az itt megszerzett tudásanyagra.

A témakör bevezetése hagyományosan az alsó és felső integrálközelítő összegek segítségével történik. Ezt azonban – figyelembe véve a tananyagban végbement hangsúly-eltolódásokat – nem célszerű matematikailag egzakt módon levezetni, sokkal fontosabb, hogy szemléletet adjunk az eljárásról, egyszerű példák segítségével. Választhatjuk például az

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2$$

görbe alatti területének kétoldali közelítését az $x_1=1$ és $x_2=5$ határok között. Ha ezt 3-4 lépésen keresztül kiszámíttatjuk, akkor világossá válhat az elv a diákok számára és előrevetíthetjük a témakör értelmét és célját. Jól segítheti munkánkat az interaktív tábla színes téglalaprajzoló funkciója, illetve – ha van erre elég időnk – akár a GeoGebra ábráival is előkészíthetjük a szemléltetést *(23. ábra)*.



23. ábra

A fejezet érdemi tárgyalását a határozatlan integrál, illetve a primitív függvény fogalmával kell kezdenünk.

Definíció

Legyen adott az $I \subset R$, illetve az $f : I \to R$ függvény. Az $F : I \to R$ függvényt az *f* <u>*primitív függvényének*</u> nevezzük, ha F differenciálható I-n, és $F'(x) = f(x)\ (x \in I)$.

Megjegyzés

Ha *F* primitív függvénye *f*-nek, akkor $\forall c \in R$ esetén a $F(x) + c$ is primitív függvénye *f*-nek.

Definíció

Egy *f* függvény (összes) primitív függvényeinek halmazát az *f* <u>*határozatlan integráljának*</u> nevezzük. Jele: $\int f(x)dx = F(x) + c$.

E fogalmak körültekintő tisztázása után sort keríthetünk az alapintegrálok, illetve az integrálási szabályok bevezetésére, felidézve a differenciál-számítás megfelelő ismereteit. A legfőbb gondunk itt az lehet, hogy milyen mélyre nyúljunk az ismeretek átadása terén. E tekintetben a tankönyv-szerzők, továbbá a példatárak összeállítói is nagyon különböző álláspontra helyezkednek. Tapasztalatunk szerint az alapintegrálok és integrálási szabályok mellett elegendő az

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c \text{, az } \int f' \cdot f^{\alpha} = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

valamint egy-két példán keresztül a parciális integrálás szabályának ismertetése.

Miután begyakoroltattuk a határozatlan integrál kiszámítását, rátérhetünk a határozott integrál kiszámítására a Newton-Leibniz formula segítségével. Kezdhetjük akár a korábban említett példa megoldásával.

Példa

Számítsuk ki az $\int_1^5 \frac{1}{4}x^2 dx$ határozott integrál értékét!

Megjegyzés

Hangsúlyoznunk érdemes, hogy esetünkben a feladatot a következő szöveggel is kitűzhettük volna: „Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbe alatti területét az az $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$ határok között!”

$$\left(T = \int_1^5 \frac{1}{4}x^2 dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{125}{12} - \frac{1}{12} = \frac{31}{3} \right).$$

Az egyszerű gyakorló példák között érdemes olyat is mutatni, ahol a keresett terület az x tengely alatt helyezkedik el.

Példa

Határozza meg az $f(x) = x^2 - 4$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt zárt síkidom területét!

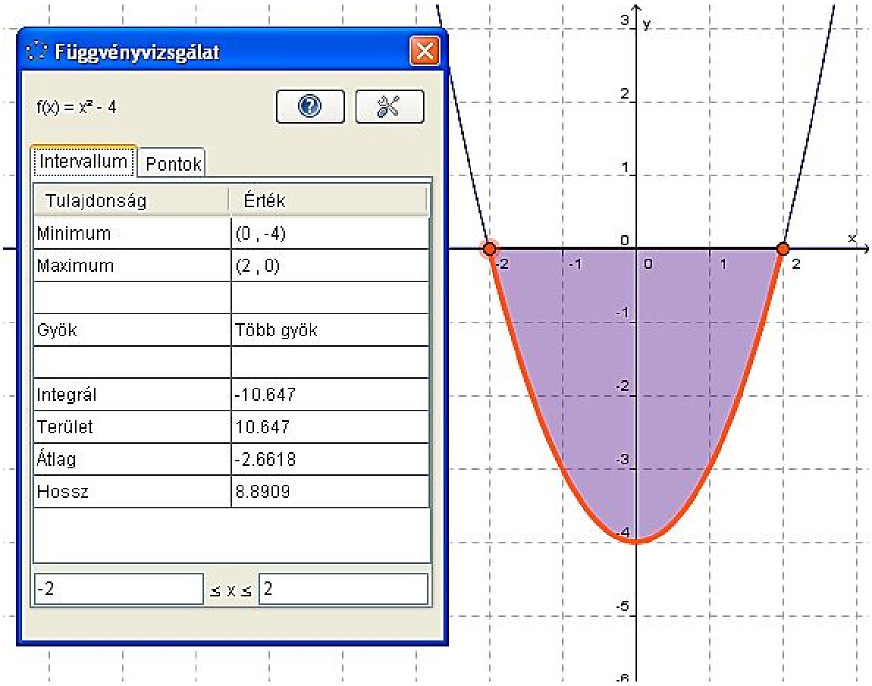
Megoldás

Mindenekelőtt fel kell ismertetnünk, hogy szükségünk van a függvény zérushelyeinek kiszámítására, illetve érdemes ábrázoltatnunk is a függvényt. Rá kell mutatnunk, hogy a határozott integrál itt negatív értéket ad; a terület ennek az abszolút értékeként adódik:

$$T = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} \right| = \left| \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 \right| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}.$$

Mutassuk meg, hogy a GeoGebra az integrálás műveletében, megoldásunk ellenőrzésében is segítségünkre siethet – egyrészt a *Függvényvizsgálat* opció használatával, másrészt az *Integrál* eszközzel *(24. ábra)*.

Érdemes ilyenkor felhívni a figyelmet a gépi számítás látható pontatlanságára!



24. ábra

Tanulságos lehet a következő példa is.

Példa

Számítsuk ki az $f(x) = \sin x$ függvény és az x tengely által határolt zárt síkidom(ok) területét az $x = -\pi$ és az $x = \pi$ határok között!

Megjegyzés

Mutassuk meg, hogy ha óvatlanul kiszámítjuk az

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ értékét, eredményül 0-t kapunk. A szinuszfüggvény képének felidézésével rávezethetjük a diákokat ennek okára, s arra is, hogy a páratlanság tulajdonságának ismerete segíthet a könnyebb számításban

$$\left(T = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 4 \right).$$

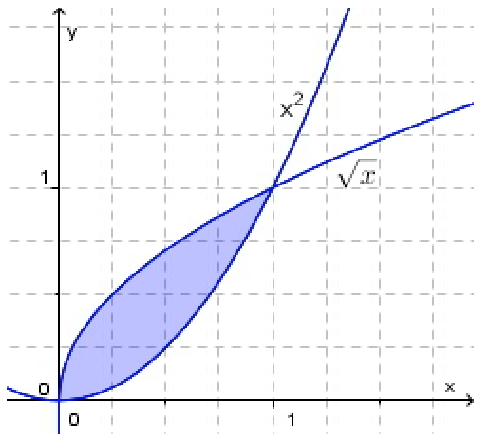
A görbe alatti területekre vonatkozó feladatok után rátérhetünk a két görbe által határolt síkidomokra. Ennek az az egyik előnye, hogy a 12. évfolyamon újra meg újra felidézhetjük az egyes függvénytípusok képét, metszéspontjaik kiszámításának módját.

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x^2$ függvények grafikonjai által határolt zárt síkidom területét!

Megjegyzés

Miután a diákok jelentős része hajlamos elnagyolni a függvényábrázolást, így „első ránézésre” hajlamosak akár azt is gondolni, hogy nincs ilyen síkidom. Mutassuk meg, hogy az egységek megfelelő megválasztásával feltárhatjuk e síkidom mibenlétét. Ebben akár a GeoGebra nagyított ábrája is segítségünkre lehet (*25. ábra*), bár értékesebb, és a célunknak jobban megfelel, ha maguk a diákok készítik el azt.



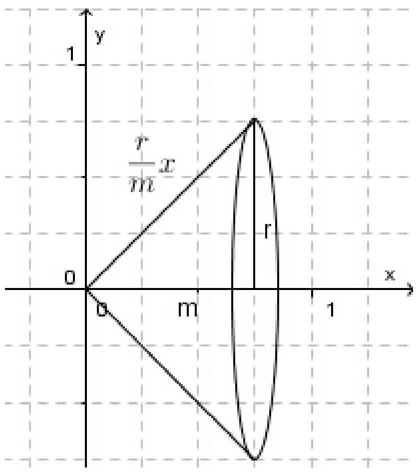
25. ábra

Ugyanezt mondhatjuk a metszéspontok meghatározásáról: a $\sqrt{x} = x^2$ egyenlet korrekt megoldásáról természetesen nem mondhatunk le, még ha látjuk is a metszéspontokat az ábránkon.

$$\left(T = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \right)$$

A területszámítási feladatok begyakorlása után áttérhetünk a forgástestek térfogatának meghatározására. A térgeometria tanítása során gyakran szembesülünk azzal, hogy a diákok egy része nehezen látja, milyen forgástest keletkezhet síkidomok forgatása során. Nem lehet elég sok ilyen jellegű feladatot megoldani, hogy a helyes szemlélet kialakuljon. Mindezt itt, az integrálszámítás tanítása során is segíthetjük, függvénygörbék forgatásával.

A henger, a kúp, a csonkakúp és a gömb térfogatának kiszámításakor mindenekelőtt tanulságos a diákokkal felismertetni, hogy milyen függvényt, milyen határok között érdemes ahhoz megforgatnunk az x tengely körül, hogy a kívánt paraméterekkel rendelkező forgástesthez jussunk. Ez a henger és a kúp esetén viszonylag könnyebben sikerülhet (*26. ábra*).



26. ábra

A megfelelő függvény felismerése után a térfogatot könnyen kiszámíthatjuk a

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

összefüggés felhasználásával:

$$V=\pi\int_0^m\left(\frac{r^2}{m^2}\cdot x^2\right)dx=\pi\left[\frac{r^2}{m^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^m=\frac{r^2\pi\cdot m}{3}.$$

Utalnunk érdemes arra a tényre is, hogy itt van igazán jelentősége a dx jelölésnek, hiszen ez egyértelműen mutatja, hogy a sok betű közül melyik a függvény változója, ami szerint integrálnunk kell.

Nehezebben, de arra is rá tudjuk vezetni a diákokat, hogy a csonkagúla esetében a megforgatandó függvény az

$$f(x)=\frac{R-r}{m}\cdot x,$$

ahol R az alapkör, r pedig a fedőkör sugara. A legnehezebb, mégis talán a leghasznosabb a gömb térfogatképletének a levezetése, hiszen itt módunkban áll felidézni a koordináta-geometriai ismereteket, utalva arra, hogy a kör implicit egyenletéből hogyan állíthatjuk elő a munkánkhoz szükséges (felső) félkör explicit egyenletét. A térfogat kiszámítása abban a tekintetben is rendkívül tanulságos, hogy ismét lehetőségünk adódik rámutatni az x változó és az r paraméter egymástól elkülönülő szerepére. A gömb térfogatára az $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ függvény felismerése után a

$V=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$ összefüggésből

$$V=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-\left(-r^3-\frac{-r^3}{3}\right)\right)=\frac{4r^3\pi}{3}$$

szépen adódik.

A fenti térfogatképletekre később, a térgeometria tényleges tárgyalásakor már elég ismerősként utalni, másrészt könnyű meggyőzni az emelt szintű érettségire vállalkozó diákokat, hogy e bizonyítások bármelyikét könnyűszerrel felvállalhatják a szóbeli elméleti tételek kidolgozása, megtanulása során.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, dr. Kántor, S-né & dr. Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr. Gyapjas, F-né, Hack, F., dr. Kántor, S-né & dr. Korányi, E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

7. *„Elfelejtett" feladatmegoldási algoritmusok*

BALLA Éva

7.1. Algoritmizálható típusfeladatok az egyenletek témakörben

7.1.1. Szöveges feladatok megoldása (táblázat, egyenlet, egyéb megoldási módszerek)

Szöveges feladatok megoldása során fordítsunk elegendő időt és figyelmet a szövegbeli összefüggések megkeresésére, az ismeretlen célszerű megválasztására. Gyakran lehet – és érdemes – az adatainkat táblázatba rendezni, ábrát készíteni, így jobban láthatóvá válik a mennyiségek közötti kapcsolat. Ne feledjük, hogy megoldásainkat a szöveg alapján kell ellenőrizni, és nem elég az ismeretlent megadni, a kérdésre kell (szövegesen) válaszolni! A szöveges feladatok egy része egyenletek alkalmazása nélkül is megoldható, de csak teljes megoldást fogadjunk el!

Megoldási módszer: visszafelé gondolkodás módszere (rákstratégia)

Feladat

Nagymami palacsintát sütött három unokájának. Először Ádám érkezett, aki megette a palacsinták negyedét. Aztán Bence jött, aki megette a maradék palacsinták harmadát, és még kettőt. Végül Csilla jött, aki megette a maradék negyedét és az utolsó három palacsintát. Hány palacsintát sütött a nagyi, és mennyit ettek az unokák külön-külön? (Konfár et al. 2010: 17.)

Megoldási módszer: egyenlettel, táblázatok használatával
Életkorral kapcsolatos feladatok

Példa

Kata 2 éve háromszor annyi idős volt, mint amennyi a testvére volt akkor. Három év múlva már csak kétszer annyi idős lesz, mint a testvére. Hány évvel idősebb Kata a testvérénél? (Konfár L. et al. 2010: 19.)

Megoldás

Készítsünk táblázatot! (*1. táblázat*)

	2 éve	most	3 év múlva
Kata életkora	3x	3x+2	3x+5
testvére életkora	x	x+2	x+5

1. táblázat

$3x+5=2(x+5)$, amiből $x=5$. Kata 17 éves, a testvére 7, Kata 10 évvel idősebb.

Feladat

Egy barátom azt mondta, hogy 5 év múlva az 5 évvel ezelőtti életkorom háromszorosánál 5 évvel lesz idősebb, míg én 5 év múlva feleannyi idős leszek, mint ő. Hány éves a barátom? (Gádor E. et al. 1990: 147.)

Keverési feladatok

Példa

5 liter 12%-os és 3liter 40%-os sóoldatot összeöntöttek. Hány százalékos lett a keverék?

Megoldás

	oldat (l)	töménység (%)	oldott anyag (l)
1. oldat	5	12	$5 \cdot 0{,}12$
2. oldat	3	40	$3 \cdot 0{,}4$
keverék	8	x	$8 \cdot \frac{x}{100}$

2. táblázat

Az oldott anyag a keverékben annyi, mint a két oldatban összesen:

$5 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}4 = 8 \cdot \frac{x}{100}$, amiből kapjuk, hogy x = 22,5 százalékos a keverék.

Megjegyzés
Hasonló táblázat használható, ha az oldat mennyisége, az oldat töménysége és az oldott anyag mennyisége közül bármelyik kettő ismert, és a harmadikat kell meghatároznunk.

Mozgásos feladatok

Példa
Ha az autóbusz az utat A-ból B-be 8 km/h-val nagyobb átlagsebességgel tenné meg, akkor menetideje 48 perccel rövidebb lenne; ha viszont átlagsebessége 2 km/h-val kisebb volna, menetideje 15 perccel hosszabb volna. Mekkora az autóbusz átlagsebessége? Mekkora az út hossza? (Gádor E. et al. 1990: 142.)

Megoldás

	idő (h)	**sebesség (km/h)**	**találkozásig megtett út (km)**
szokásos	t	v	vt
gyorsabban	t-0,8	v+8	(v+8)(t-0,8)
lassabban	t+0,25	v-2	(v-2)(t+0,25)

3. táblázat

A $vt = (v+8)(t-0{,}8)$ és $vt = (v-2)(t+0{,}25)$ egyenletrendszer megoldása adja az eredményt.

Feladat
A Szegedről Budapestre közlekedő vonat hétfőn Cegléd és Budapest között pályaépítési munkálatok miatt harmadára volt kénytelen csökkenteni az addigi átlagsebességét. Hétvégén a Ceglédtől számított 19 km-es szakaszon újra a régi átlagsebességével mehetett, viszont utána Budapestig megint harmad akkora lehetett csak a vonat átlagsebessége. Így hétfőn 30 perccel többet késett, mint a hétvégén. Mekkora a vonat eredeti átlagsebessége km/h-ban? (Emelt szintű érettségi 2006. május.)

Együttes munkára vonatkozó feladatok

Példa

Egy munkát két ember közül az első 15 órával rövidebb idő alatt végez el, mint a másik. Először 10 órán át az első ember dolgozott, majd 30 óráig a másik. Mennyi idő alatt készítette volna el a munkát külön-külön az első, illetve a második?

Megoldás

Töltsük ki a feladat szövege alapján az alábbi *4. táblázatot!*

	munkaidő egyedül dolgozva	**egységnyi idő alatt a munka elvégzett része**	**tényleges munkaidő**	**a munka elvégzett része**
1.	x	1/x	10	10/x
2.	x+15	1/(x+15)	30	30/(x+15)

4. táblázat

$$\frac{10}{x}+\frac{30}{x+15}=1$$

$$10x+150+30x=x(x+15)$$

$$x^2-25x-150=0$$

$$x_1=30 \quad x_2=-5$$

Az első ember 30 óra, a második 45 óra alatt végezne egyedül a munkával.

Feladat

Panni és Kati elvállalta, hogy legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 óra alatt végezne a gépeléssel. Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10-kor fogott hozzá. Megállás nélkül, egyenletes sebességgel gépeltek kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak 40%-ával végeztek, és abbahagyták a gépelést. Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati egyedül a teljes szakdolgozatot (egyenletes munkatempót, és szünet nélküli gépelést feltételezve)? Szerdán reggel 9-kor egyszerre kezdtek hozzá a gépeléshez, és egyszerre fejezték be. Közben Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati egy órányi időtartamra hagyta abba a munkát. Hánykor fejezték be a lányok a munkát? (Emelt szintű érettségi 2006. május.)

Számjegyes feladatok

Példa

Egy kétjegyű szám számjegyeinek különbsége 4. Ha a számot és a számjegyeinek felcserélésével kapott számot összeadjuk, akkor 110-et kapunk. Melyik ez a két szám?[1]

Megoldás

	tízes	**egyes**	**a kétjegyű szám**
eredeti	x	x + 4	10x + (x + 4) = 11x + 4
felcserélt	x + 4	x	10(x + 4) + x = 11x + 40

5. táblázat

11x + 4 + 11x + 40 =110, amiből x = 3. A két szám a 37 és a 73.

7.1.2. Exponenciális és logaritmikus egyenletek típusai (definíció ill. azonosságok alkalmazása)

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet! $\frac{1}{8}\cdot\sqrt[4]{4^{3x-1}}=8^{-\frac{2}{3}}$

Megoldás

Mindkét oldalon ***egytagú*** kifejezés áll, ezért az egyenletet nem rendezzük, hanem a hatványozás definícióit, illetve azonosságait használva a két oldalt azonos alapú hatványként írjuk fel:

[1] http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/9-evfolyam/2_tanari_modulok/ amat9_17_2 modulleiras.pdf

$$2^{-3}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{3x-1}{4}}=\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$2^{-3+\frac{3x-1}{2}}=2^{-2}$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a két azonos alapú hatvány csak akkor lehet egyenlő, ha kitevőik megegyeznek, ebből $x = 1$ adódik.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $3^{x-2}+4\cdot 3^{x-1}+5\cdot 3^x-2\cdot 3^{x+1}=4$ b) $4^{x+\frac{1}{2}}+31\cdot 2^{x-1}=4$

Megoldás

a) Az egyenlet egyik oldala ***többtagú***, és nem rendezhető át úgy, hogy a két oldalon egytagú kifejezések legyenek, de a hatványalapok egyformák. Ilyen esetben a kitevőket írjuk fel egyszerűbb alakba, felhasználva a hatványozás azonosságait!

$$\frac{3^x}{3^2}+4\cdot\frac{3^x}{3}+5\cdot 3^x-2\cdot 3^x\cdot 3=4$$

Innen a közös nevezővel való beszorzás és a kijelölt műveletek elvégzése, összevonás, rendezés után kapjuk a megoldást. Az egyszerűnek tűnő feladat sok hibalehetőséget rejt azok számára, akik bizonytalanok a hatványozás azonosságaiban vagy a műveleti tulajdonságokban. Számukra megkönnyíti a megoldást egy új ismeretlen bevezetése:

3^x helyett a-t írva: $\frac{a}{9}+\frac{4a}{3}+5a-6a=4$

alakba írhatjuk az egyenletünket. Ebből $a = 9$, így $x = 2$.

b) Hasonló átalakításokkal, 2^x helyett új ismeretlent bevezetve, másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai:

$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2=-8$.

Előbbiből $x=-2$, utóbbinak nincs megoldása, mert $2^x>0$.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\log_3[2+\log_6(9-\log_2 x)]=1$

Megoldás

Általában érdemes az egyenleteket az értelmezési tartomány felírásával kezdeni, de ennél a feladatnál ez most hosszadalmas volna (három egyenlőtlenség vizsgálata), a megoldások ellenőrzésével kiderül, ha az eredmény nem eleme az értelmezési tartománynak. A logaritmus ***definíciója*** szerint:

$[2+\log_6(9-\log_2 x)]=3^1$, rendezés után:

$\log_6(9-\log_2 x)=1$, ismét a definíció alapján:

$9-\log_2 x=6$, az előző lépéseket ismételve:

$\log_2 x=3$, amiből x = 8 (ellenőrizve) megoldás.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\lg(x-3)+\lg(x-2)=1-\lg 5$.

Megoldás

Az egyenlet akkor értelmezhető, ha $x>3$. A jobb oldalon az 1 helyett a logaritmus definíciója szerint lg10-et írunk, majd alkalmazzuk a logaritmus ***azonosságait***:

$$\lg(x-3)(x-2)=\lg\frac{10}{5}$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt a két (azonos alapú) logaritmus pontosan akkor lehet egyenlő, ha argumentumaik megegyeznek. A kapott másodfokú egyenletből $x_1=4$ és $x_2=1$, de utóbbi nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldás.

Példa

$x^{\lg x}=1000x^2$

Megoldás

ÉT: R^+. Mivel az alap és a kitevő is ismeretlen, vegyük mindkét oldal logaritmusát!

A logaritmus azonosságainak alkalmazásával és $\lg x=a$ új ismeretlen bevezetésével az $a^2=3+2a$ másodfokú egyenletre vezethető vissza a feladat.

7.1.3. Diofantoszi egyenletek

Példa

Határozzuk meg azokat az n egész számokat, amelyekre a $\frac{2n+10}{n+1}$ egész szám!

Megoldás

A feladat megoldható másodfokú diofantoszi egyenletre visszavezetve ***is:***

$\frac{2n+10}{n+1} = k, \quad k \in Z \Rightarrow 2n+10 = kn+k$

egyenlet egész megoldásait keressük.

Átrendezés után: $kn+k-2n=10$. A bal oldalt szorzattá alakítva: $(k-2)(n+1)+2=10$, azaz $(k-2)(n+1)=8$. A 8-at két egész szám szorzataként kell felírnunk:

$1\cdot 8,\ 2\cdot 4,\ 4\cdot 2,\ 8\cdot 1,\ -1\cdot(-8),\ -2\cdot(-4),\ -4\cdot(-2),\ -8\cdot(-1).$

Megoldások: (*k, n*)-re: (3, 7), (4, 3), (6, 1), (10,0), (1, -9), (0, -5), (-2, -3), (-6, -2).

Feladat

Egy cm-ben mérve egész élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kis kocka. Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát! (emelt szintű érettségi 2005. október)

Felhasznált irodalom

Gádor E., Gyapjas F., Hárspatakiné D.V., Korányi E., Pogáts F., Reiman I. & Scharnitzky V. (1990): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Budapest, Tankönyvkiadó.

Konfár L., Kozmáné J. Á., Pintér K. (2010): *Sokszínű matematika munkafüzet 8*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Egyszerű egyenletek, Kompetencia alapú programcsomagok, Matematika kompetencia, Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit Kft. (2008): http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/9-evfolyam/2_tanari_modulok/amat9_17_2modulleiras.pdf (2015.01.05.)

Feladatsorok az emelt szintű írásbeli érettségi vizsgákon: http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (2015.02.25.)

7.2. Trigonometrikus egyenletek megoldási módszerei

A szögfüggvények általánosításakor, 10. évfolyamon tanulóink már rendelkeznek az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek (pl. $\sin x = 0{,}8$) megoldásához szükséges ismeretekkel. Hasonló egyenletek megoldása elmélyíti a szögfüggvény fogalmát, tudatosítja a periodicitását. A 11. évfolyamon a trigonometria alkalmazásainak részeként oldunk meg különböző típusú trigonometrikus egyenleteket. Kerettantervi és érettségi követelmény a definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása. Az ezekhez szükséges alapvető szögfüggvények közötti kapcsolatok alkalmazása elvárható, de az addíciós tételeket csak emelt szinten tanítjuk.

A trigonometrikus egyenletekre nem lehet általános megoldási módszert találni, ám ezeket is érdemes bizonyos típusfeladatok megoldásának bemutatásával tanítani, fokozatosan haladva a legegyszerűbbektől az összetettebb egyenletek felé.

7.2.1. Azonos szögfüggvények egyenlősége

A következőkben a

$\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$

alakú egyenletekkel foglalkozunk.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\sin 5x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos(x + 60°) = \cos 2x$

Megoldás

a) Két eset lehetséges: a szögek periódustól eltekintve vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek (*1.a. ábra*).

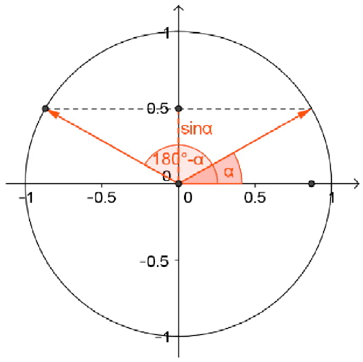
1. eset: $5x = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$ 2. eset: $5x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + n2\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in Z$ $x = \frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3} \quad n \in Z$

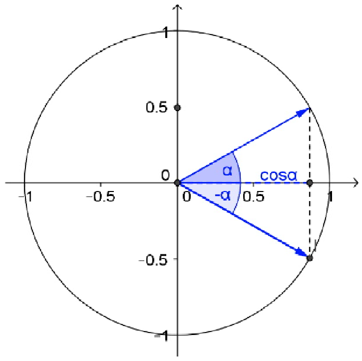
b) Két eset lehetséges: a szögek periódustól eltekintve vagy egyenlők, vagy ellentett szögek (*1.b. ábra*).

1. eset: $x+60° = 2x + k360°$ 2. eset: $x+60° = -2x + n360°$

$x_1 = 60° - k360° \quad k \in Z$ $x_2 = -20° + n \cdot 120° \quad n \in Z$



1.a. ábra



1.b. ábra

Megjegyzések

– Figyeljünk arra, hogy a helyes megoldást többféle alakban is felírhatjuk, pl. a b.) részben másik periódust választva az $x_2 = 100° + n \cdot 120°$ is helyes megoldás.

– A $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$, illetve a $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta$ egyenletek megoldása annyival egyszerűbb, hogy – mivel egy perióduson belül ezek a függvények szigorúan monoton tulajdonságúak – elegendő egy esetet vizsgálni, a szögek csak periódusukban különbözhetnek.

7.2.2. Pótszögek közötti összefüggések felhasználása

A következőkben a
$\sin\alpha = \cos\beta$, $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta$ alakú egyenletekkel foglalkozunk.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet! $\sin 3x = \cos x$

Megjegyzés

A $\sin\alpha = \cos\beta$ és a $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta$ típusú egyenleteknél a pótszögek szögfüggvényei közötti összefüggéseket használjuk fel:
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, illetve $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90° - \alpha)$.

A példában szereplő egyenlet e szerint a következő alakban írható fel: $\sin 3x = \sin(90° - x)$, ami az előző pontban ismertetett típusú egyenlet.

7.2.3. $\sin\alpha = -\sin\beta$, $\cos\alpha = -\cos\beta$, $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{ctg}\beta$ alakú egyenletek

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\mathrm{tg}3x = -\mathrm{tg}x$ b) $\cos 2x = -\cos x$

Megoldás

a) Az értelmezési tartományt tangens és kotangens esetében vizsgáljuk meg:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\; x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in Z)\,.$$

A tangensfüggvény páratlan, azaz $-\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}(-x)$, ezért

$$\mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}(-x)$$

$$3x = -x + k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \qquad k \in Z$$

b) A koszinuszfüggvény páros, ezért az előbbi eljárás nem használható. E helyett a definíció alapján belátható $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ összefüggést használhatjuk, vagy a pótszögekre vonatkozó kapcsolat szerint az előző példában ismertetett módon szinusz szögfüggvényre térünk át, az egyenlet mindkét oldalán.

Megjegyzések

– A *sinx, tgx, ctgx* függvények mindegyike páratlan, ezért $a\sin\alpha = -\sin\beta,\quad \mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\beta,\quad \mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{ctg}\beta$ esetekben a mínusz előjeltől a példa a.) részében bemutatott módon „szabadulhatunk meg”.

– A $\sin\alpha = -\cos\beta$, $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{ctg}\beta$ típusú egyenleteknél az előző két pontban említett módszereket kombináljuk.

– A b.) részben felírt egyenlet a kétszeres szögek szögfüggvényének felhasználásával visszavezethető másodfokú egyenletre.

7.2.4. $a \cdot \sin^n x = b \cdot \cos^n x$ alakú egyenletek

Példa
Oldjuk meg a következő egyenletet!
$3\sin x = \sqrt{3}\cos x$

Megoldás
A cos$x$ nem lehet 0, mert akkor az egyenlet jobb oldalának is 0-val kell egyenlőnek lennie, de sin$x$ és cos$x$ egyszerre nem lehet 0. Ezért oszthatunk cos$x$-szel, majd felhasználjuk, hogy

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = tgx$. Így egyenletünk: $tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, azaz $x = 30° + k \cdot 180°$.

Megjegyzés
Az $a \cdot \sin^n x = b \cdot \cos^n x$ alakú egyenletek megoldhatók a fenti módon, $\mathrm{tg}^n \mathrm{x}$ -re visszavezetve az egyenletet.

7.2.5. Szorzattá alakítással megoldható egyenletek

Példa
Oldjuk meg a következő egyenletet!
$2 \cdot \sin \mathrm{x} = \mathrm{tgx}$

Megoldás
ÉT: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$.
A szorzattá alakítás módszerét fogjuk használni.

$$2\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\sin \mathrm{x} \cdot \cos \mathrm{x} = \sin \mathrm{x}$$

$$\sin \mathrm{x}(2\cos \mathrm{x} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0, \text{ vagy } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = k\pi, \quad k \in Z \qquad\qquad x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad l, n \in Z.$$

Megjegyzés

A 2. sorból a kétszeres szögek szögfüggvényének felhasználásával: $\sin 2x = \sin x$

1. eset: $2x = x + k \cdot 2\pi$ 2. eset: $2x = \pi - x + n \cdot 2\pi$

$x = k \cdot 2\pi \quad k \in Z$ $\quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{n 2\pi}{3} \quad n \in Z$.

Úgy tűnik, az előző megoldással más eredményeket kaptunk. Ez azonban nem így van, erről az egy periódusba eső megoldások felsorolásával (vagy ábrázolásával) meggyőződhetünk.

Trigonometrikus egyenleteknél előfordul, hogy az eredmény alakja függ a megoldás módjától, erre érdemes felhívni tanulóink figyelmét.

7.2.6. Másodfokúra visszavezethető egyszerűbb trigonometrikus egyenletek

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

Megoldás

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggés felhasználásával az egyenletet másodfokú egyenletre vezetjük vissza:

$$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 = 0$$

$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$,→bevezethetünk egy új ismeretlent ($\cos x = y$)

$$-2y^2 + 5y - 2 = 0$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

Az első nem ad megoldást, mert $\cos x \le 1$, a másikból $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad l, n \in Z$.

7.2.7. Másodfokúra visszavezethető, $a \cdot \sin^{2n} x + b \cdot \sin^n x \cdot \cos^n x + c \cdot \cos^{2n} x = 0$ alakú egyenletek

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet! (Czapáry E. 2006: 213)

$2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 5\sin^2 x = 3$

Megoldás

A jobb oldalt $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$ alakban írva, majd az egyenletet átrendezve a következőt kapjuk:

$-\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0$.

A cos*x* nem lehet 0 (lásd 7.2.4. fejezet, 194. oldal), ezért oszthatunk $\cos^2 x$-szel. A $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tgx}$ összefüggést felhasználva

a $-1 - 3\mathrm{tgx} + 2\mathrm{tg}^2\mathrm{x} = 0$

egyenlethez jutunk.

Megoldások: $x_1 = 1{,}059 + k\pi$, $x_2 = -0{,}2737 + l\pi$ ($k, l \in Z$).

Megjegyzés

Általánosan az

$a \cdot \sin^{2n} x + b \cdot \sin^n x \cdot \cos^n x + c \cdot \cos^{2n} x = 0$

alakú egyenlet a fenti módszert követve $\mathrm{tg}^n \mathrm{x}$-re másodfokú egyenletté alakítható át.

7.2.8. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c = 0$ alakú egyenletek

Példa

Oldjuk meg a $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$ egyenletet! (Gádor E. 1990: 353)

Megoldás

Osszuk el az egyenletet 2-vel, majd használjuk fel, hogy az

$\frac{1}{2} = \cos 60°$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$.

A $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ addíciós összefüggést felhasználva egyenletünk a

$\sin(x + 60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alakot ölti.

Megoldásai: $x_1 = k \cdot 360°$ $x_2 = 60° + l \cdot 360°.$ $(k, l \in Z)$

Megjegyzés

Az $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c = 0$ egyenletet $\sqrt{a^2 + b^2}$ -tel osztva a bal oldal mindig átalakítható $\sin(x + \alpha)$ alakba, mert található olyan α szög, melyre:

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7.2.9. Értékkészlet vizsgálatával megoldható trigonometrikus egyenletek

Példa

Mely valós számokra igaz, hogy $\sin 7x + \cos 2x = -2$? (Gádor E. 1990: 342)

Megoldás

A szinusz- és a koszinuszfüggvény értékkészlete is [-1; 1], ezért az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\sin 7x = -1$ és $\cos 2x = -1$. Előbbiből

$x = \dfrac{3\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7}$, utóbbiból

$x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi$, ahol $k, l \in Z.$

A két egyenlet egyszerre akkor teljesülhet, ha

$\dfrac{3\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} = \dfrac{\pi}{2} + l\pi$, amely az

$l = 2n, \quad (k = 7n + 1)$ alakú egész számok esetén állhat fenn,

azaz $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, ahol $n \in Z.$

Felhasznált és ajánlott irodalom

Ágotai L. (1999): *Ez az optimum.* Kisújszállás, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.

Czapáry E., Czapáry E., Csete L., Hegyi Gy., Iványiné H. Á. & Reiman I. (2006): *Gyakorló és érettségi felkészítő feladatgyűjtemény III.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Gádor E., Gyapjas F., Hárspatakiné D.V., Korányi E., Pogáts F., Reiman I. & Scharnitzky V. (1990): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Budapest, Tankönyvkiadó.

7.3. Koordinátageometriai feladatok analízise

A koordinátageometria előzményei (grafikonok, ponthalmazok ábrázolása koordinátarendszerben, műveletek vektorokkal) előfordulnak alsóbb évfolyamokon is, a 11. évfolyamon sorra kerülő fejezet mégis teljesen újnak tekinthető abban a megközelítésben, mely szerint feladata geometriai problémák algebrai eszközökkel történő megoldása. Ahhoz tehát, hogy valaki jó legyen ebben a témában, biztos geometriai és algebrai alapokkal kell rendelkeznie. Ez adja ennek a témakörnek a nehézségét és egyben a szépségét is.

Tanulóink jó részének nehézséget okoz egy-egy hosszabb feladat megoldása, hiszen először fel kell idézni a probléma megoldásához szükséges geometriai ismereteket, majd az egyes lépések végrehajtása során algebrai feladatokat is meg kell oldaniuk. Az összetett feladatok megoldásában segíthet ezek kisebb egységekre bontása. Az egységek olyan egyszerű, rövid koordinátageometriai feladatok legyenek, amelyek megoldása már ne jelentsen problémát a diákoknak. Természetesen ehhez szükség van a témakör elején egy hosszabb, alapozó szakaszra, amikor az ilyen egyszerű típusfeladatok begyakorlására fordítunk időt.

7.3.1. Műveletek a koordinátasík vektoraival

Ha adott $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektor, akkor megadható a két vektor összege, a két vektor különbsége, vektor számszorosa, vektor +90° illetve -90°-os elforgatottja, vektor abszolútértéke, két vektor skaláris szorzata, két vektor hajlásszöge.

Feladatok

Adott az **a** (-3; 4) és a **b** (7; 2) vektor.

(1) Számítsuk ki a két vektor abszolútértékét, skaláris szorzatát, hajlásszögét!

(2) Adjunk meg az **a** vektorral párhuzamos vektort, melynek hossza fele az **a** hosszának!

(3) Adjunk meg a **b** vektorra merőleges vektort, melynek hossza egységnyi!

(4) Döntsük el, hogy a **c**(8; -28) és a **d**(7,5; 10) vektorok között van-e az **a** vagy **b** vektorral párhuzamos vagy rájuk merőleges vektor!

7.3.2. Pont koordinátageometriája

Annak ismeretében, hogy a koordinátasíkon a pontok koordinátái megegyeznek a pontba mutató helyvektorok koordinátáival, vektorok segítségével igazolhatók a szakasz hosszára, felezőpontjára, harmadolópontjára, adott arányú osztópontjára, háromszög súlypontjára vonatkozó képletek.

Ha adott $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ pont, akkor megadhatók az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái, az AB szakasz hossza, az AB szakasz felezőpontja, az ABC háromszög súlypontja.

Megjegyzés

A szakasz hosszának kiszámítása két egyszerűbb ismeretből összerakható (kezdő- és végpontjával adott vektor koordinátái, vektor abszolútértéke). A képlet megjegyzésében az is segíthet, ha egy ábrán bemutatjuk, hogy a Pitagorasz-tétel alkalmazásáról van szó.

Feladatok

(5) Adott a koordinátasíkon két pont: $P(-1; 5)$, $Q(7; 3)$. Írjuk fel a $\overrightarrow{PQ}$ vektor koordinátáit!

6) Egy vektor kezdőpontja $A(5; 2)$, az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$, ahol **v**(-3; 7). Határozzuk meg $\overrightarrow{AB}$ vektor végpontjának koordinátáit!

(7) Adott három pont: $A(2; 3)$, $B(-4; 5)$, $C(5; 8)$. Állapítsuk meg, hogy egy egyenesre illeszkednek-e!

Megjegyzések

– Nagyon egyszerű, de nagyon lényeges ismeretekről van szó, szinte mindig használjuk, hogy a koordinátarendszer tetszőleges vektora egyenlő a végpontjába és a kezdőpontjába mutató helyvektorok különbségével.

– Gyakori hiba, hogy a vektor végpontjának koordinátáit mindig egyenlőnek tekintik a vektor koordinátáival. Ez azonban csak az origóból kiinduló helyvektorokra igaz.
– A (7) összetettebb feladat: a három pontból képezni kell két vektort, és ezekről kell eldönteni, párhuzamosak-e.

Feladatok

(8) Adott a koordinátasíkon két pont: $A(-1; 3)$, $B(5; 7)$. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!

(9) Adott a PQ szakasz egyik végpontja: $P(8; 2)$ és felezőpontja $F(5; -3)$. Adjuk meg a szakasz másik végpontjának koordinátáit!

(10) Adott a koordinátasíkon két pont: $A(-1; 3)$, $B(5; 7)$. Határozzuk meg az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontjának koordinátáit!

(11) Adott egy szakasz egyik végpontja: $A(-5; 7)$ és egyik harmadolópontja $H(3; 1)$. Adjuk meg a szakasz másik végpontjának koordinátáit!

(12) Adott az AB szakasz két végpontja: $A(-4; -5)$ és $B(2; 3)$. Határozzuk meg, milyen arányban osztja az AB szakaszt a $P(0,8; 1,4)$ pont!

(13) Adottak egy háromszög csúcspontjai: $A(2; 3)$, $B(-4; 5)$, $C(5; 8)$. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

(14) Adott egy háromszög két csúcsa: $A(8;2)$, $B(-1;5)$ és súlypontja $S(3; 6)$. Adjuk meg a harmadik csúcspont koordinátáit!

(15) Egy háromszög oldalainak felezőpontjai: $E(-2;-3)$, $F(4;-2)$, $G(1; 3)$. Adjuk meg a csúcsok koordinátáit!

Megjegyzések

A felezőpontra, osztópontra, súlypontra tanult összefüggések gyakorlására szolgálnak a fenti példák. A (11) feladatban vektorokkal is számolhatunk a harmadolópontra vonatkozó összefüggés helyett. Az (12) feladatban az AP és PB szakaszok hosszával (vagy vektorok számszorosával) célszerű számolni, nincs szükség az osztópont koordinátáinak általános képletére. A (15)-ben egyenletrendszer helyett vektorokkal is dolgozhatunk.

Példák

(16) Adottak egy háromszög csúcspontjai: $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(2; 4)$. Határozzuk meg a háromszög kerületét!

(17) Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit, ha $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(2; 4)$!

Megjegyzés

Most is többféle megoldás közül választhatunk (vagy mindet megbeszélhetjük). 1) Az oldalak hosszát kiszámoljuk, majd koszinusztétellel a legnagyobb szöget, aztán még egy szöget koszinusz- vagy szinusztétellel. 2) Oldalvektorokat írunk fel, és a skaláris szorzatukból határozzuk meg a szögeket. Vigyázzunk arra, hogyan irányítjuk a vektorokat! (Pl. az A csúcsnál levő szöget nem adja meg az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CA}$ vektorok hajlásszöge, az utóbbi helyett is az A-ból induló $\overrightarrow{AC}$ vektorra van szükség.)

Példa

(18) Adottak egy háromszög csúcspontjai: $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(2; 4)$. Határozzuk meg a háromszög területét!

Megoldás

1) Kiszámoljuk a háromszög két oldalának hosszát, és az ezek által bezárt szöget, majd használjuk a

   $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletet.
2) Kiszámoljuk a háromszög mindegyik oldalát, majd alkalmazzuk a Herón-képletet.
3) A háromszöget befoglaló téglalap területéből levonjuk a külső derékszögű háromszögek területét.
4) Az egyenes egyenletének, illetve a pont és egyenes távolságának megtanítása után a következőképp is eljárhatunk: kiszámoljuk a háromszög egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a hosszát, majd ezekből számoljuk a területet.

Feladatok

(19) Egy paralelogramma két csúcspontjának koordinátái $A(5; 7)$, $B(-4; 3)$, középpontjának koordinátái $K(1; -2)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

(20) Egy paralelogramma három csúcspontjának koordinátái az egyik körüljárási irányban: $A(2; 6)$, $B(-1; 2)$, $C(1; -1)$. Határozzuk meg a negyedik csúcspont koordinátáit!

Megjegyzések

– A feladatoknak érdemes többféle megoldását is megbeszélni. Ezzel a paralelogrammáról tanultakat is felfrissíthetjük, és többféle koordinátageometriai gondolatmenetet gyakorlunk.
– A (20) feladat nehezebb változata az, hogy nem adjuk meg a körüljárási irányt. Így a teljes megoldás három eset kiszámítását jelenti. Heterogén csoportban lehetőséget ad a differenciálásra, ha a feladatot kétféle megfogalmazásban adjuk fel.
– Minden feladatnál segítséget jelent az ábra. Egy pontos ábráról sokszor az eredmény is leolvasható (vigyázzunk, ez nem a teljes megoldása a feladatnak), így számításainkat ellenőrizni is tudjuk. Összetettebb feladatoknál érdemes külön vázlatot készíteni, amelyen a megoldás tervét, lépéseit végiggondolhatjuk.

7.3.3. Az egyenes egyenlete

Feladat

(21) Adott egy egyenes két pontja: $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$. Adjuk meg az egyenes két irányvektorát, két normálvektorát, meredekségét, irányszögét!

Megjegyzés

Hangsúlyozzuk, hogy egy egyenesnek végtelen sok irányvektora és normálvektora létezik, míg a meredekség és az irányszög egyértelmű. Nézzünk olyan példát is, amikor nem értelmezhető az iránytangens!

Az egyenes egyenletének levezetését követően mindenképpen mutassunk olyan feladatokat, amelyek az egyenlet használhatóságának megértését segítik. Például: különböző kiindulási adatokból egyenes egyenletét felírni; adott pontokról eldönteni, hogy illeszkednek-e valamely megadott egyenesre; adott egyenes egyenletéből bizonyos tulajdonsággal rendelkező vagy tetszőleges pontokat leolvasni; adott egyenes egyenletéből normálvektorát, irányvektorát, meredekségét megadni; egyenlet alapján egyenest ábrázolni.

Példák

(22) Írjuk fel annak az egyenesnek egyenletét, amelynek adott
a) egy pontja $A(12; 6)$ és egy normálvektora $\mathbf{n}(-2; 5)$,
b) egy irányvektora $\mathbf{v}(6;-1)$ és egy pontja $B(3; 4)$,
c) meredeksége $m = -4$ és egy pontja $C(2; 9)$,
d) irányszöge 30°és egy pontja $D(7; 13)$,
e) két pontja $E(-6;-4)$ és $F(2; 12)$!

(23) Illeszkednek-e az 5x+3y=4 egyenletű egyenesre a $P(-1;3)$, $Q(2; -2)$ és $R(-4; 9)$ pontok?

(24) Adjuk meg a 3x-2y+6=0 egyenletű egyenesnek azt a pontját a.) amelyben metszi az x-tengelyt, b.) amelyben metszi az y-tengelyt, c.) amelynek abszcisszája 4, d.) amelynek ordinátája 5, e.) további két tetszőleges pontját!

(25) Adjuk meg a 4x-6y+8=0 egyenletű egyenes a.) két normálvektorát, b.) két irányvektorát, c.) meredekségét, d.) irányszögét!

(26) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a 2x+3y=12 egyenletű egyenest!

Ha már ilyen feladatokat önállóan meg tudnak oldani a tanítványaink, továbbléphetünk egy fokkal összetettebb feladatokra.

Példák

(27) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(5; 3)$ ponton és az $y = 2x - 3$ egyenletű
a) egyenessel párhuzamos,
b) egyenesre merőleges!

(28) Ábrázolás nélkül állapítsuk meg, hogy a következő egyenesek között melyek párhuzamosak vagy merőlegesek!

$e: 3x + 5y = 1 \quad f: 4x - 5y = 12 \quad g: 5x - 6y = 30 \quad h: 2x + 3y = 5$

$i: 8x - 10y = 7 \quad j: y = \frac{5}{3}x + 4 \quad k: y = -\frac{2}{3}x - 6 \quad l: 12x + 10y = 8$

Megjegyzés

A normálvektor és az irányvektor fogalmának megértése nem megy mindig egyszerűen, a diákok egy része hajlamos keverni a kettőt. A (22) feladat megoldása során rámutathatunk arra, hogy a vektor és az egyenes kölcsönös helyzetétől függően ugyanaz a vektor lehet irányvektor és normálvektor is. A fenti példákban az egyenesek egyenleteiből le kell olvasni a helyzetüket jellemző adatokat, majd felhasználni a párhuzamosság, illetve merőlegesség feltételeit. A feladatok megoldásához az egyenes egyenletének gyakorlása során előkerülő ismeretek és a vektorokról korábban tanultak összekapcsolására van szükség.

Két egyenes metszéspontjának kiszámítása előtt célszerű visszatérni arra, mit is jelent egy egyenes egyenlete. Ezt felhasználva indokolhatjuk, miért az egyenletrendszer megoldása adja a metszéspont koordinátáit. Hasonló gondolatmenet vezet bármely két alakzat metszéspontjainak kiszámításához.

7.3.4. A kör egyenlete

A kör egyenletének levezetését követően mindenképpen mutassunk olyan feladatokat, amelyek az egyenlet használhatóságának megértését segítik. Például: a kör egyenletéből középpontját, sugarát megadni; adott pontokról eldönteni, hogy adott körhöz képest milyen helyzetűek; adott kör egyenletéből bizonyos tulajdonsággal rendelkező vagy tetszőleges pontokat leolvasni; kör egyenletét felírni átmérő vagy középpont és kerületi pont ismeretében; egyenlet alapján kört ábrázolni.

Példák

(29) Határozzuk meg az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

(30) Milyen helyzetűek az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű körhöz képest a következő pontok: $A(-1; 1)$, $B(2; 0)$, $C(-4; 5)$ pontok?

(31) Határozzuk meg az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű kör a.) 1 abszcisszájú pontjának, b.) -3 ordinátájú pontjának c.) tengelyekkel való metszéspontjainak (ha vannak) koordinátáit!

(32) Adjuk meg az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ kör négy tetszőleges pontjának koordinátáit!

(33) Írjuk fel a kör egyenletét, ha átmérőjének végpontjai: $A(6, 9)$ és $B(12; 2)$!

(34) Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja $C(-4; 6)$ és a kör egyik pontja $P(2; 10)$!

Ezt követően érdemes a másodfokú kétismeretlenes egyenlet teljes négyzetté kiegészítésével megadni a kör kanonikus egyenletét. A kör és egyenes metszéspontjának, a kör érintőjének meghatározása során a korábban tanított ismeretekre építhetünk.

Nagyon fontos a fentiekben bemutatott alapvető számítások, „kis lépések” biztos ismerete. Ezek begyakorlására szánjunk elegendő időt, mert ha az egyszerű számításokat sikerül rutinná fejleszteni, akkor ez – az összetett feladatok egységekre bontásával – megkönnyíti komplexebb feladatok megoldását is.

Felhasznált és ajánlott irodalom

Czapáry E., Czapáry E., Csete L., Hegyi Gy., Iványiné H. Á. & Reiman I. (2006): *Gyakorló és érettségi felkészítő feladatgyűjtemény III.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi I., Marosvári P., Pálmay L., Pósfai P., SipossA. & Vancsó Ö. (2003): *Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I, II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.